



Случайные величины

Функция распределения

$$P(X < x) = F(x)$$

Плотность распределения вероятности

$$P(a < X < b) = \int_a^b \rho(x) dx$$

$$\rho(x) = F'(x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(x) dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1$$

Теория вероятностей

Математическая статистика

Математическое
ожидаие

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Эмпирическое
(выборочное)
среднее

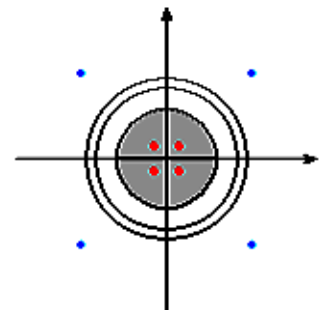
$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(x)]^2 \rho(x) dx$$

Дисперсия

$$s^2(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

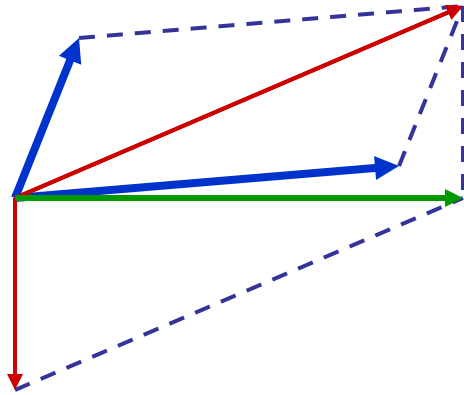
$$D_x = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{(x^2)} - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}$$





Сложение случайных погрешностей



$$Z = X \pm Y$$

$$\bar{Z} = \bar{X} \pm \bar{Y}$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

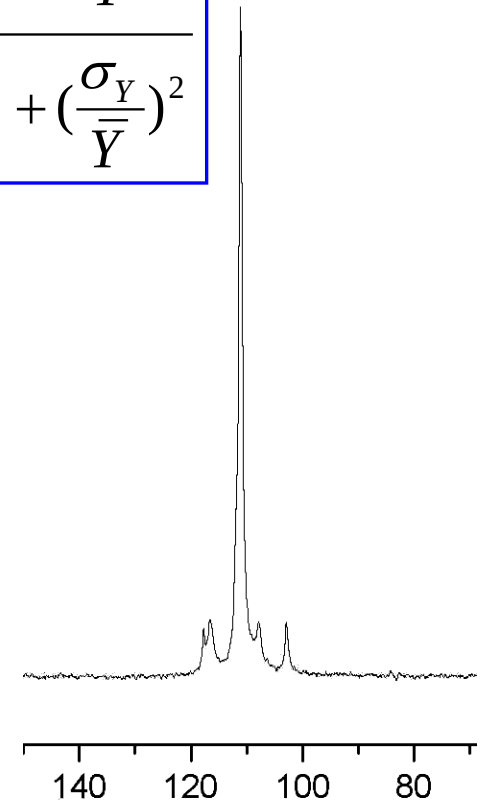
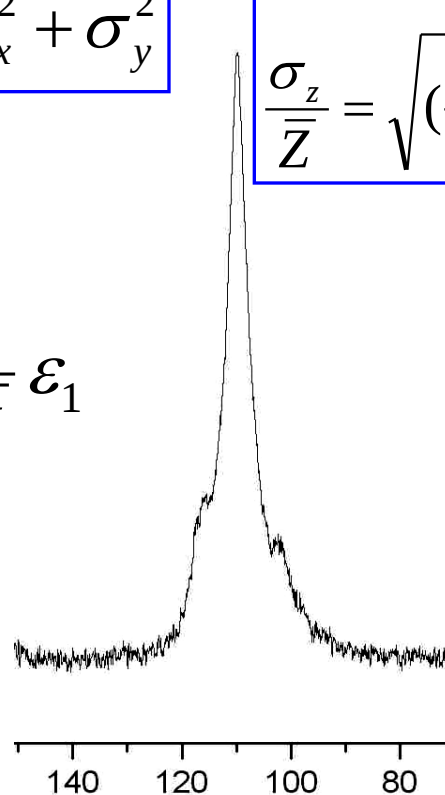
$$Z = X \cdot Y \quad Z = \frac{X}{Y}$$

$$\bar{Z} = \bar{X} \cdot \bar{Y} \quad \bar{Z} = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$$

$$\frac{\sigma_z}{\bar{Z}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{\bar{X}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\bar{Y}}\right)^2}$$

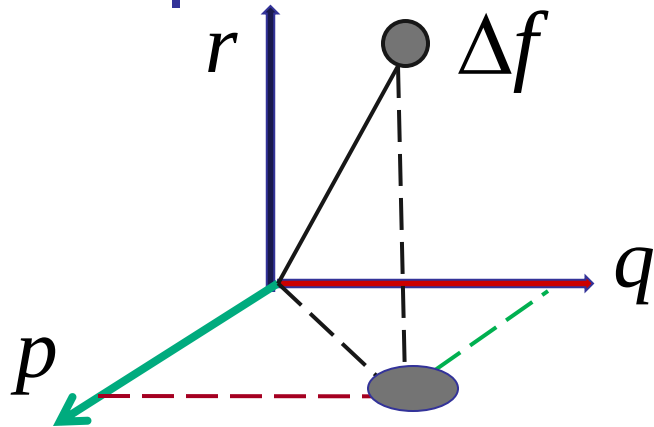
$$\varepsilon_N = \frac{\sigma_N}{x_N} = \frac{\sqrt{N}\sigma_1}{Nx_1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \varepsilon_1$$

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{P_s}{P_N} \Rightarrow \frac{V_s^2}{V_N^2}; \quad \frac{I_s^2}{I_N^2}$$





«Закон распространения ошибок»



Косвенные измерения

$$x = f(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \dots) + \Delta f$$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial f}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial f}{\partial r} \Delta r + \dots$$

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 \sigma_p^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2 \sigma_q^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 + \dots$$

Масс-спектрометрия

$$\frac{mv^2}{2} = Ue$$

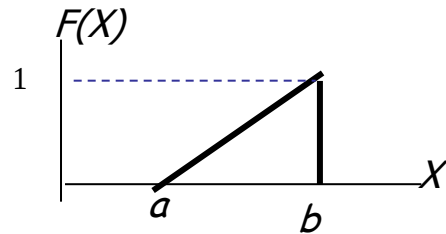
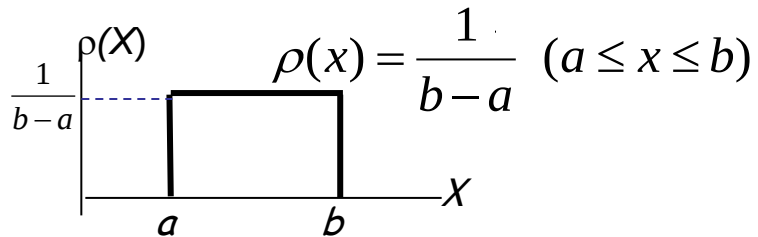
$$\frac{mv^2}{r} = e v H \quad (m/e) = \frac{H^2 r^2}{2U}$$

$$\left(\delta\left(\frac{m}{e}\right)\right)^2 = \left(\frac{2rH^2}{2U}\right)^2 (\delta r)^2 + \left(\frac{2r^2 H}{2U}\right)^2 (\delta H)^2 + \left(\frac{r^2 H^2}{2U^2}\right)^2 (\delta U)^2$$



Какие встречаются распределения?

Равномерное

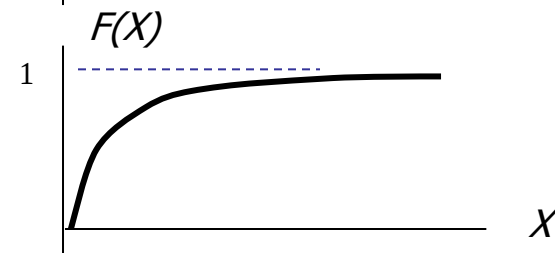
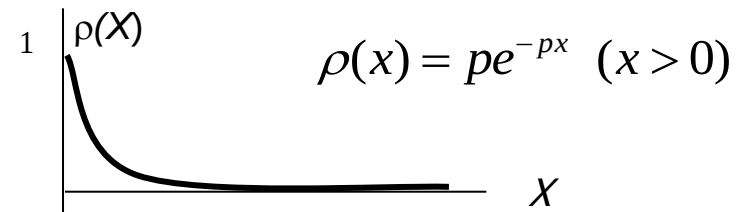


$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad (a \leq x \leq b)$$

$$\mu = \bar{x} = \frac{b+a}{2}$$

$$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Экспоненциальное



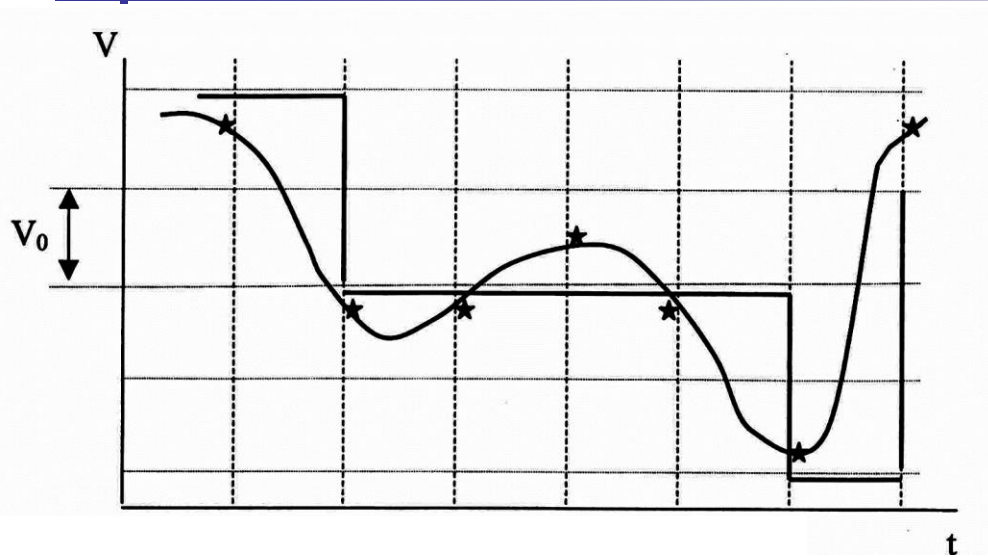
$$F(x) = 1 - e^{-px} \quad (x > 0)$$

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{p}$$

$$D(x) = \frac{1}{p^2}$$



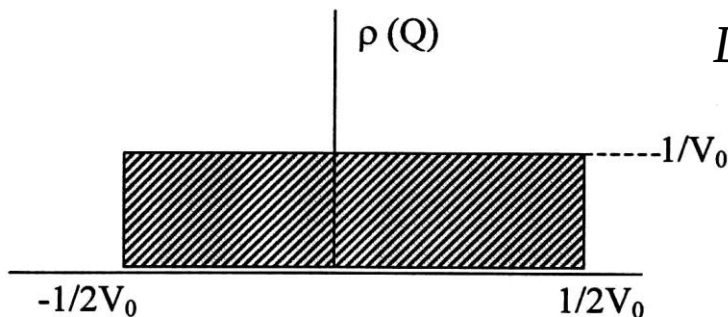
Шумы цифровой записи



$$V_0 = \frac{V_i}{2^n}$$

$$|Q| \cong V_0 / 2 = \frac{V_i}{2^{n+1}}$$

$$D = \sigma_Q^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (Q - \bar{Q})^2 \rho(Q) dQ$$



$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} Q^2 \rho(Q) dQ = \int_{-V_0/2}^{+V_0/2} Q^2 \rho(Q) dQ = \frac{Q^3}{3V_0} \Big|_{-V_0/2}^{+V_0/2} = \frac{V_0^2}{12}$$

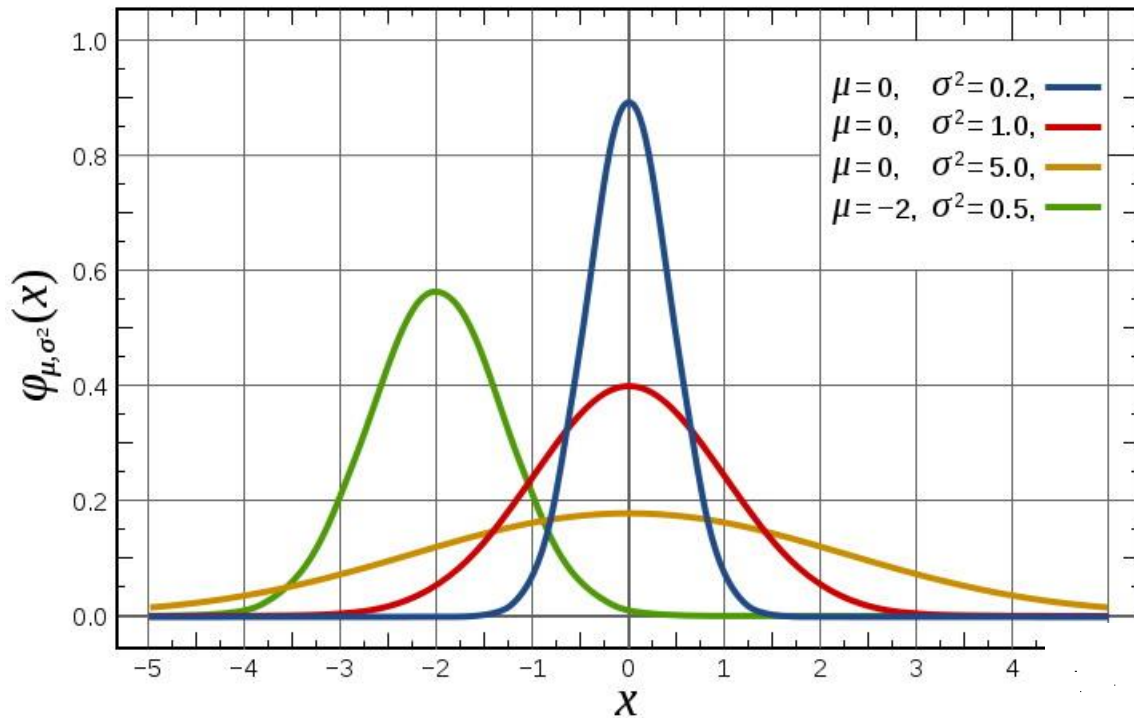
$$\sigma_Q = \frac{V_0}{2\sqrt{3}} = \frac{V_i}{2^n \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{V_i}{2^{n+1} \cdot \sqrt{3}}$$

$$N \equiv \frac{dP_N}{df} \quad N(V_i) = \frac{\sigma_{Q_1}^2}{f} = \frac{V_i^2}{3 \cdot 2^{2(n+1)} \cdot f}$$

$$S / N = \frac{P(V_i)}{N(V_i)} = f \cdot 3 \cdot 2^{2(n+1)}$$

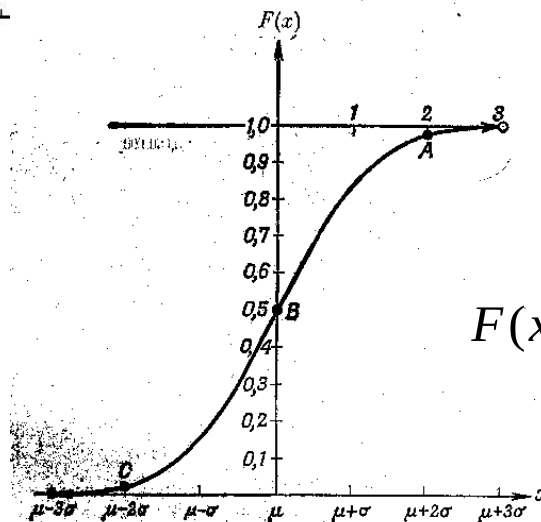
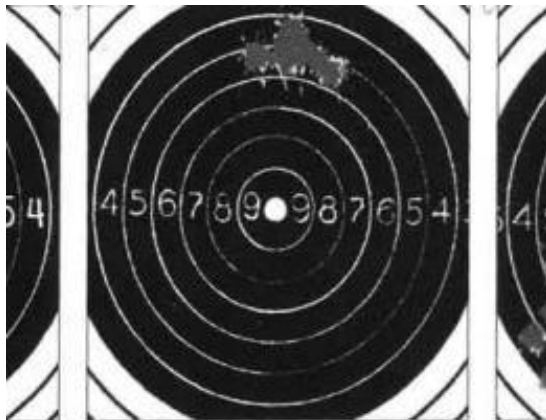


Распределение Гаусса



$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

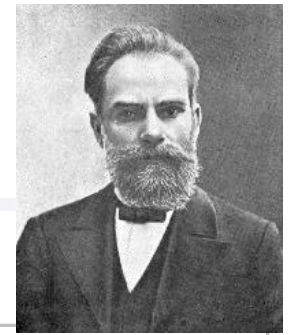
$$\rho_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$



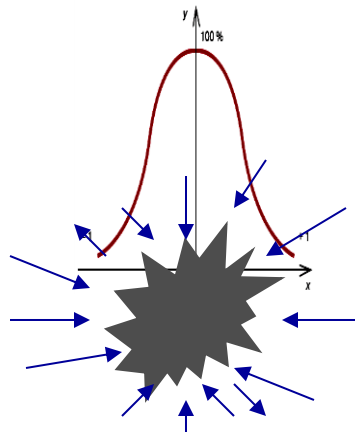
$$F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(x) dx$$



Нормальное распределение - ЦПТ Ляпунова А.М.



- Стационарность
- Независимость
- $N \rightarrow \infty$
- $\delta x \rightarrow 0$



Максимальность энтропии



$$W = \frac{\xi x^2}{2}$$

$$P(W) \propto \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{\xi x^2}{2kT}\right)$$



Заданное отклонение

$$P(a, b) = \frac{\int_a^b \rho(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx}$$



$$P(a, b) = \int_a^b \rho(x) dx$$

$$|x - \mu| < \delta$$

$$-\delta < x - \mu < \delta$$

$$\mu - \delta < x < \mu + \delta$$

$$P(\mu - \delta < x < \mu + \delta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\mu - \delta}^{\mu + \delta} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$P_\delta = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\delta/\sigma}^{+\delta/\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-q}^{+q} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^q e^{-\frac{z^2}{2}} dz \equiv 2\Phi(\delta/\sigma)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Функция Лапласа



Заданный интервал

q	$\Phi(q)$
0,0	0,0000
0,5	0,1915
1,0	0,3413
1,5	0,4332
2,0	0,4772
2,5	0,4938
3,0	0,49865
4,0	0,499968
5,0	0,499997

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

$$x = \alpha \quad z = \frac{\alpha - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$x = \beta \quad z = \frac{\beta - \mu}{\sigma}$$

$$\begin{aligned} P(\alpha < x < \beta) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha-\mu/\sigma}^{\beta-\mu/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} (\sigma dz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha-\mu/\sigma}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\beta-\mu/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\beta-\mu/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha-\mu/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

$$\mu = 30 \quad \sigma = 10 \quad P(10 < x < 50)$$

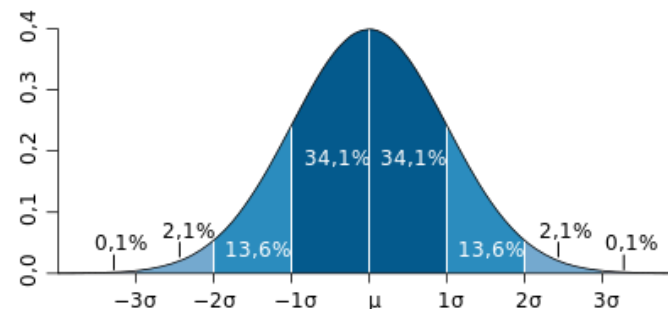
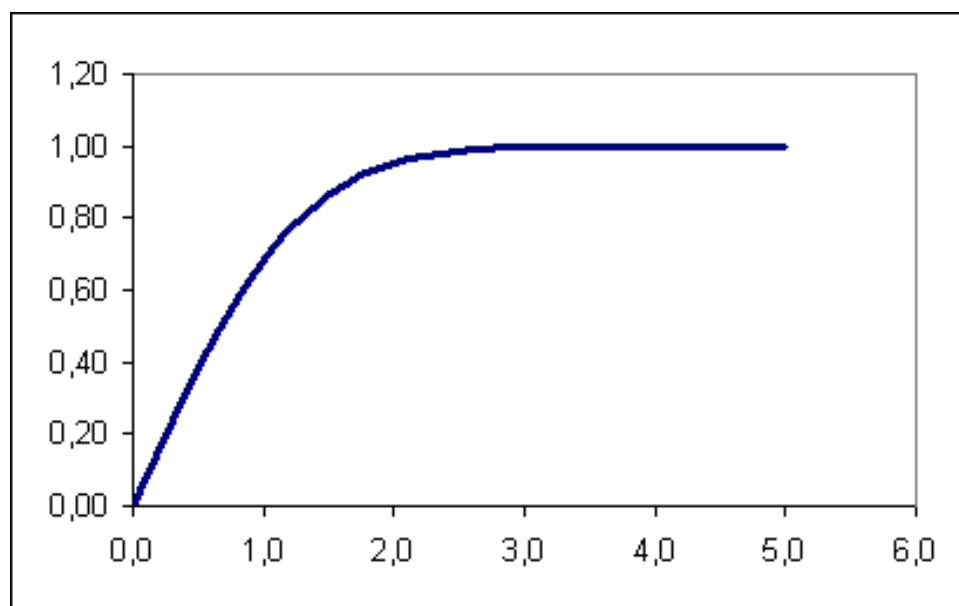
$$2\Phi(2) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544$$



Функция ошибок

$$\operatorname{erf}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-q}^{+q} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi(q) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^q e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

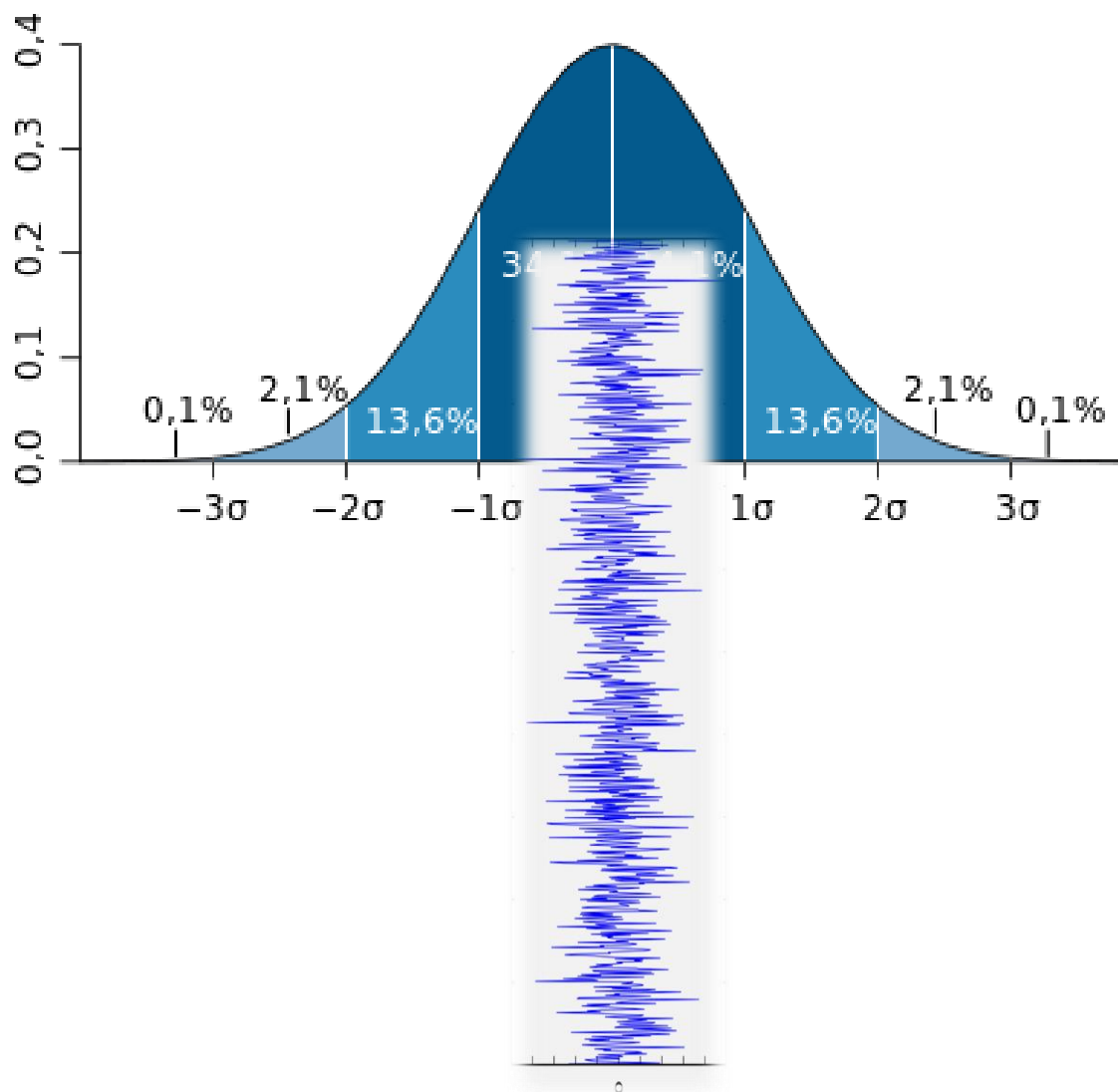
q	$\operatorname{erf}(q)$
0,0	0,0000
0,5	0,3830
1,0	0,6826
1,5	0,8664
2,0	0,9544
2,5	0,9876
3,0	0,9973
4,0	0,99994
5,0	0,999994



Правило «3σ» !!!



Достоверность обнаружения сигнала



σ	$\text{Erf}(\sigma)$
0	0
0,5	0,3830
1,0	0,6826
1,5	0,8664
2,0	0,9544
3,0	0,9973
4,0	0,9999

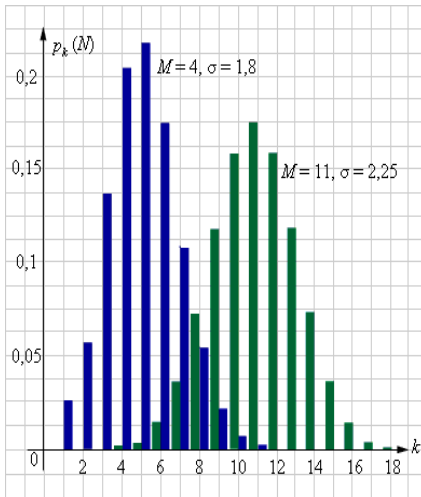
Правило « 3σ »



Распределения

Пуассона ← биномиальное → Гаусса

Биномиальное распределение



$$P_N(k) = C_N^k p^k q^{N-k} \quad C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

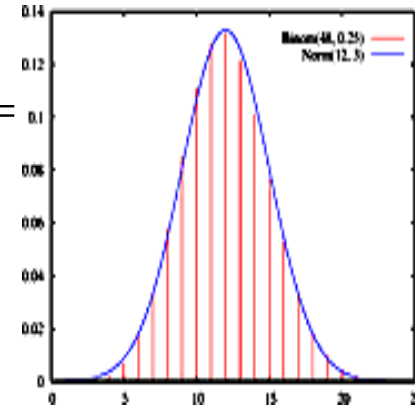
$$\bar{k} = Np$$

$$\sigma^2 = Npq$$

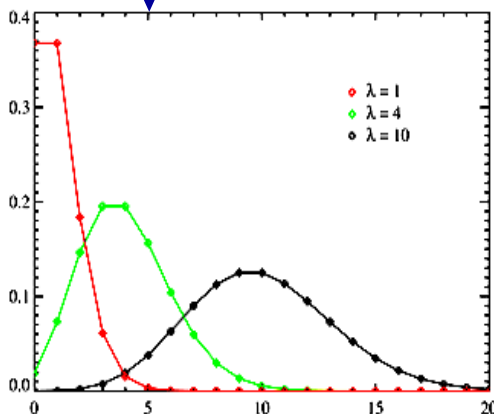
$N \rightarrow \infty, p = \text{const}$



$$P(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} \exp\left[-\frac{(k - Np)^2}{2Npq}\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(k - \bar{k})^2}{2\sigma^2}\right]$$



$N \rightarrow \infty, p \rightarrow 0,$
 $Np = \text{const}$



$$P(k) = \frac{N^k}{k!} p^k e^{-Np} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\bar{k} = Np = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda$$



Негауссовы распределения

Центральный момент порядка k $m_k = M[(x - M(x))^k]$

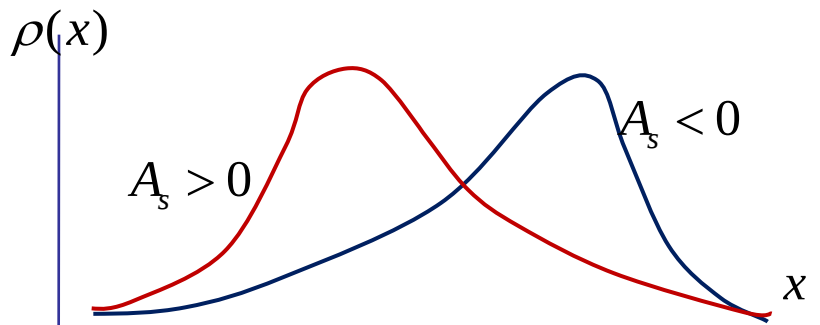
$$m_1 = M[x - M(x)] = \overline{(x - \bar{x})} = 0$$

$$m_2 = M[(x - M(x))^2] = \overline{(x - \bar{x})^2} = D(x)$$

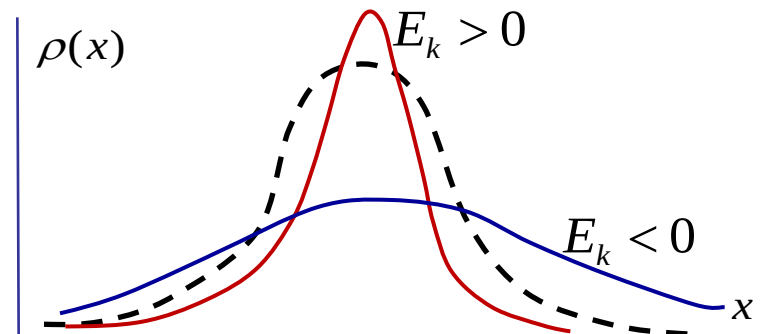
$$m_3 = M[(x - M(x))^3] = \overline{(x - \bar{x})^3}$$

$$m_4 = M[(x - M(x))^4] = \overline{(x - \bar{x})^4}$$

Асимметрия $A_s = \frac{m_3}{\sigma^3}$

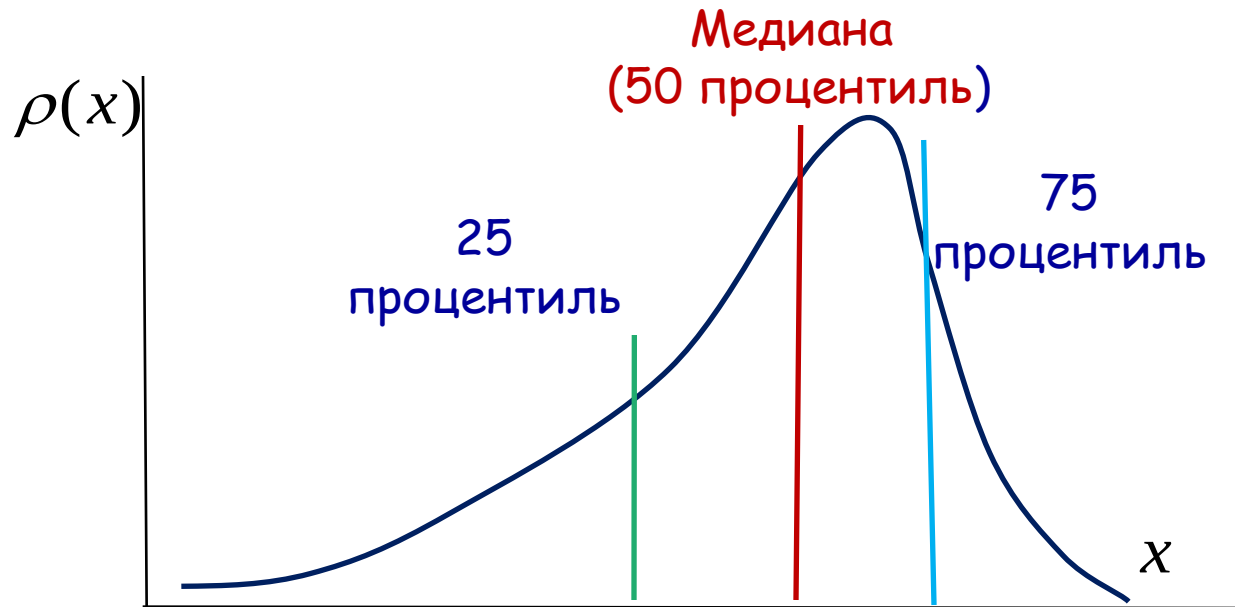


Эксцесс $E_k = \left(\frac{m_4}{\sigma^4}\right) - 3$



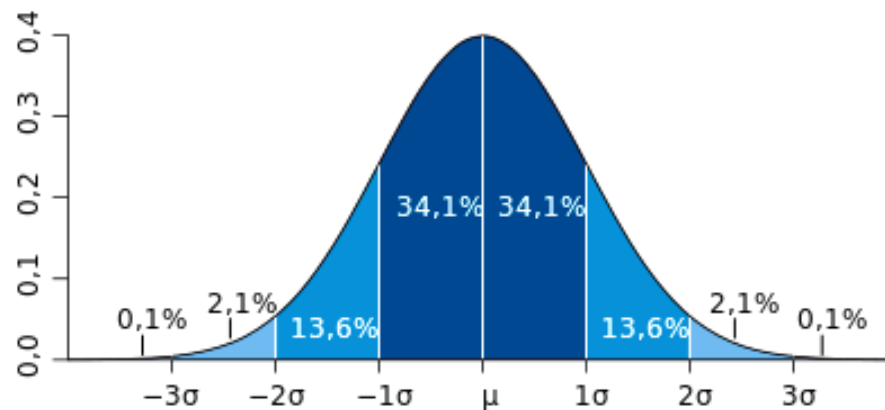


Негауссовы распределения



Нормальное
распределение

Процентили	Отклонения от среднего
2,5	$\mu - 2\sigma$
16	$\mu - \sigma$
50	μ
84	$\mu + \sigma$
97,5	$\mu + 2\sigma$





Распределение Стьюдента (t-распределение)

t-распределение, степеней свободы $k = n-1$

$$t_k = \frac{u}{\sqrt{\chi_k^2 / k}}$$

$$\rho(t, n) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \cdot \left[1 + \frac{t^2}{n-1} \right]^{-\frac{n}{2}}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} x^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

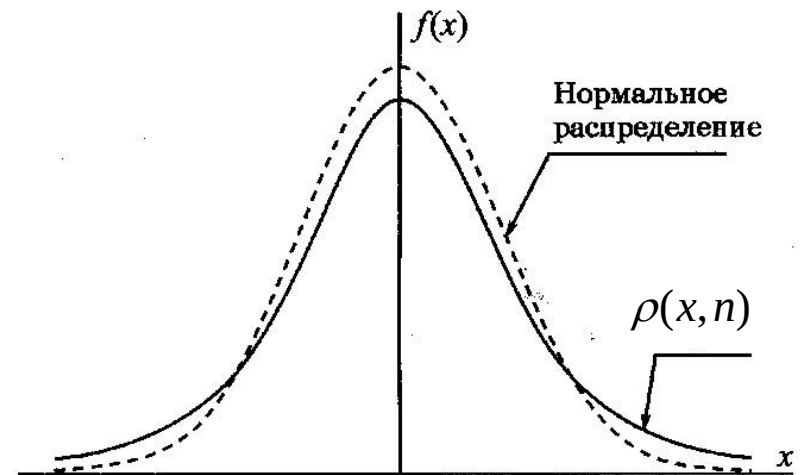
$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$t_m = 0$$

$$M(t) = 0$$

$$m_{2n+1} = \overline{(t - \bar{t})^{2n+1}} = 0$$

$$D(t) = \frac{k}{k-2}$$



$n \rightarrow \infty$

Стьюдент → Гаусс



Интервальные оценки

Доверительный интервал для оценки μ нормального распределения при неизвестном σ

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

t-распределение, степеней свободы $k = n-1$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_\gamma\right) = 2 \int_0^{t_\gamma} \rho(t, n) dt = \gamma$$

$$P(\bar{X} - t_\gamma S/\sqrt{n} < \mu < \bar{X} + t_\gamma S/\sqrt{n}) = \gamma$$

$$\mu \in (\bar{X} - t_\gamma S/\sqrt{n}, \bar{X} + t_\gamma S/\sqrt{n})$$

с надежностью γ

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				



Статистическая проверка статистических гипотез

1. Вид предполагаемого распределения
2. Предполагаемая величина параметра распределения и др.

Нулевая (основная) гипотеза H_0 $H_0: \mu = 10$

Конкурирующая (альтернативная) гипотеза H_1 $H_1: \mu \neq 10$

Ошибка 1 рода: отвергнута правильная гипотеза $P(O1) = \alpha$

Ошибка 2 рода: принята неправильная гипотеза α - уровень значимости

Статистический критерий - специально подобранная случайная величина, распределение которой известно и которая служит для проверки нулевой гипотезы. Распределения: норм, F, t, χ^2



Распределение F Фишера-Снедекора

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2}$$

$$\rho(x) \subset (0, \infty)$$

$$\rho(x) = \frac{\Gamma(\frac{k_1 + k_2}{2}) k_1^{k_1/2} k_2^{k_2/2}}{\Gamma(\frac{k_1}{2}) \Gamma(\frac{k_2}{2})} \cdot \frac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_2 + k_1 x)^{(k_1+k_2)/2}}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} x^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

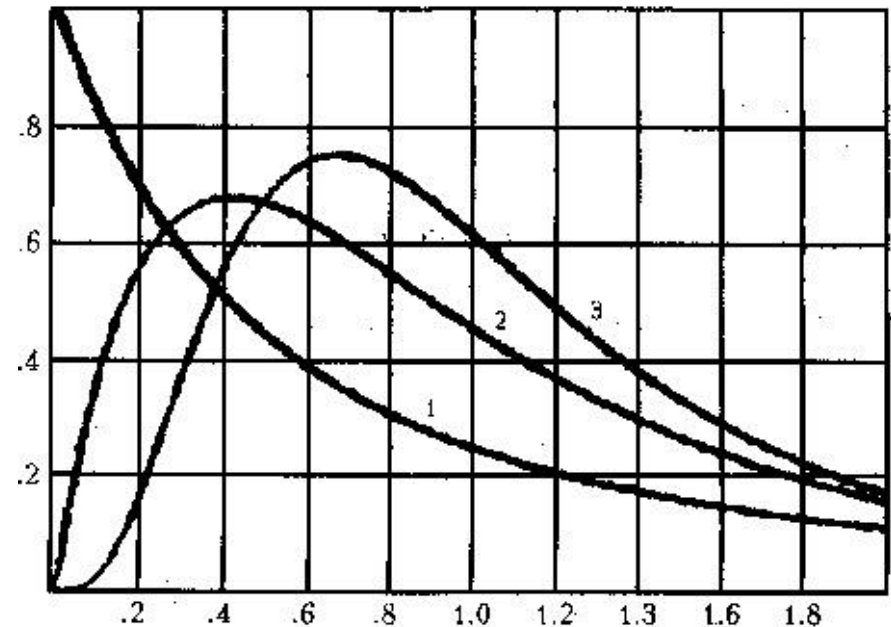
$$A_s > 0$$

$$1) k_1 = k_2 = 2$$

$$2) k_1 = 4 \quad k_2 = 10$$

$$3) k_1 = k_2 = 10$$

$$x_m = \frac{(k_1 - 2)k_2}{(k_2 + 2)k_1}$$





Распределение F Фишера-Снедекора

Критические точки распределения F Фишера — Снедекора

(k_1 — число степеней свободы большей дисперсии,
 k_2 — число степеней свободы меньшей дисперсии)

Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

$$\begin{matrix} X & Y \\ n_x & n_y \\ s_X^2 & s_Y^2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H_0: D(X) = D(Y) \\ M[s_X^2] = D(X), M[s_Y^2] = D(Y) \end{matrix}$$

$$H_0: M[s_X^2] = M[s_Y^2]$$

$$F = \frac{s_B^2}{s_M^2}$$

критерий

$$k_1 = n_1 - 1 (B)$$

$$k_2 = n_2 - 1 (M)$$

$$H_0: D(X) = D(Y)$$

$$H_1: D(X) > D(Y)$$

При $F_{\text{набл}} < F_{\text{крит}}$
 принимаем H_0

$$P[F > F_{\text{крит}}(\alpha; k_1, k_2)] = \alpha$$

Уровень значимости $\alpha=0,01$												
k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,26	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Уровень значимости $\alpha=0,05$												
k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38



Распределение хи-квадрат

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$$\rho(x) \subset (0, \infty)$$

$$\rho(x) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(\frac{k}{2})} e^{-x/2} \cdot x^{(k/2)-1}$$

$$k = n - 1 \quad (\sum X_i - n\bar{X})$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} x^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\sqrt{\chi^2} = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$$

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{\sigma^3} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$x_m = \sqrt{2}\sigma$$

Максвелл

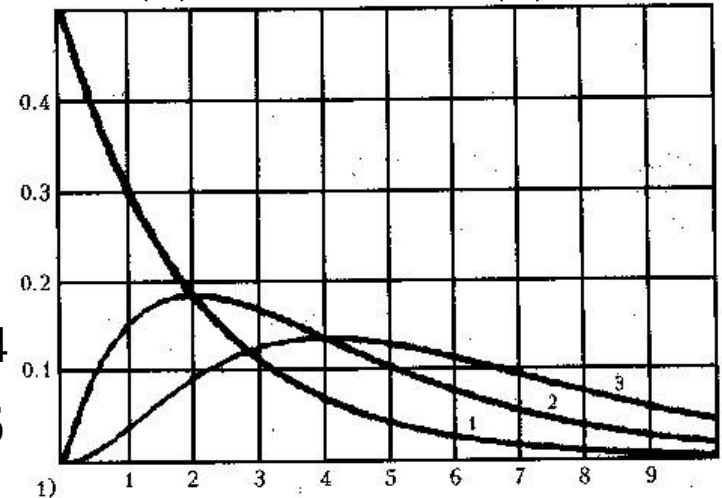
$$M(x) = n$$

$$D(x) = 2n$$

1) $k = 2$

2) $k = 4$

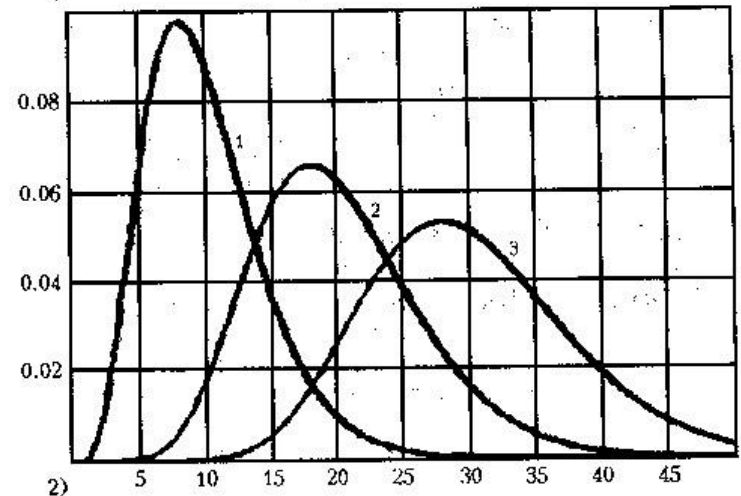
3) $k = 6$



1) $k = 10$

2) $k = 20$

3) $k = 30$



$$k \rightarrow \infty \quad \frac{\chi^2 - k}{\sqrt{2k}} \rightarrow \text{Гаусс}$$



Распределение хи-квадрат

Сравнение выборочной дисперсии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокупности

$$\sigma_0^2; n \rightarrow s^2 \quad (k = n - 1)$$

$$H_0: M(s^2) = \sigma_0^2$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \quad \text{критерий}$$

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$P[\chi^2 > \chi_{\text{крит}}^2(\alpha; k)]$$

$$H_0: \chi^2 < \chi_{\text{крит}}^2$$

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0



Дисперсионный анализ

H_0 : фактор F не влияет на признак X

Номер испытания	Уровни фактора F_j			
	F_1	F_2	...	F_p
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1p}
2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2p}
....	...	...	...	...
q	X_{q1}	X_{q2}	...	X_{qp}
Групповая средняя	$\underline{X}_1$	$\underline{X}_2$	...	$\underline{X}_p$
Дисперсия внутригруп	S^2_1	S^2_2	...	S^2_p

$$S^2_{\text{внутригруп}} = \overline{s^2_{\text{груп}}} = \frac{1}{p} (s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_p^2)$$

$$s^2_{\text{межгруп}} = q s_{\bar{x}}^2$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \sigma^2 = n \sigma_{\bar{x}}^2$$

$$F = \frac{\sigma^2_{\text{межгруп}}}{\sigma^2_{\text{внутригруп}}}$$



Дисперсионный анализ

Номер испытания	Уровни фактора F_i		
	F_1	F_2	F_3
1	-1	0	-10
2	0	2	-8
3	4	4	-2
4	5	6	0
Групповая средняя	2.0	3.0	-5.0
Ср.кв.др. отклонение			
S	2,94	2,58	4,76

$$s_{\text{межгруп}}^2 = q s_{\bar{X}}^2 = 4 \cdot 4.36^2 = 76.00$$

$$F = \frac{\sigma_{\text{межгруп}}^2}{\sigma_{\text{внутригруп}}^2} = \frac{76,0}{12,7} = 5,98$$

$$F_{\text{крит}}(\alpha; k_1, k_2) = F(0.05; 2; 9) = 4.26$$

$$s_{\text{внутригруп}}^2 = \frac{1}{3} (2,94^2 + 2,58^2 + 4,76^2) = 12,7$$

$$\bar{X} = \frac{1}{3} (\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3) = (2.0 + 3.0 - 5.0) / 3 = 0$$

$$s_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X})^2 + (\bar{X}_2 - \bar{X})^2 + (\bar{X}_3 - \bar{X})^2}{p - 1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2 - 0)^2 + (3 - 0)^2 + (-5 - 0)^2}{2}} = 4.36$$

$$k_{\text{межгруп}} = p - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$k_{\text{внутригруп}} = p(q - 1) = 3(4 - 1) = 9$$

$$F_{\text{набл}} > F_{\text{крит}} \Rightarrow H_0 \text{ отвергаем}$$



Не только Фурье

Интегральные преобразования

Фурье

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

Полезные свойства

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \Leftrightarrow \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$$

$$f^{(n)}(t) \Leftrightarrow (-i\omega)^n F(\omega)$$

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \Leftrightarrow \alpha F(p) + \beta G(p)$$

$$f^{(n)}(t) \Leftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

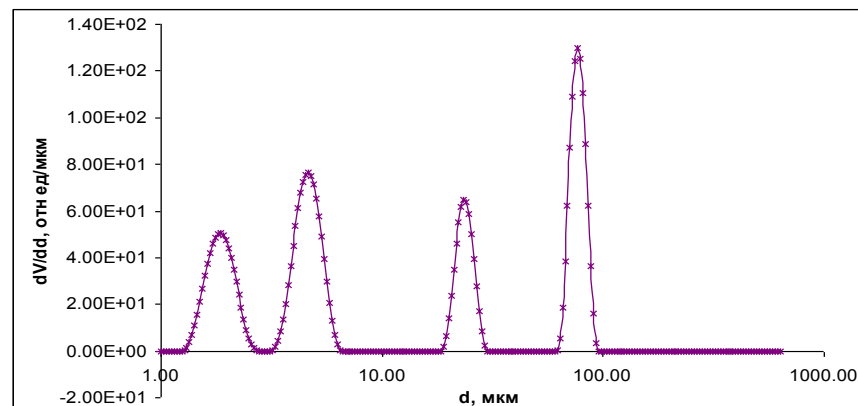
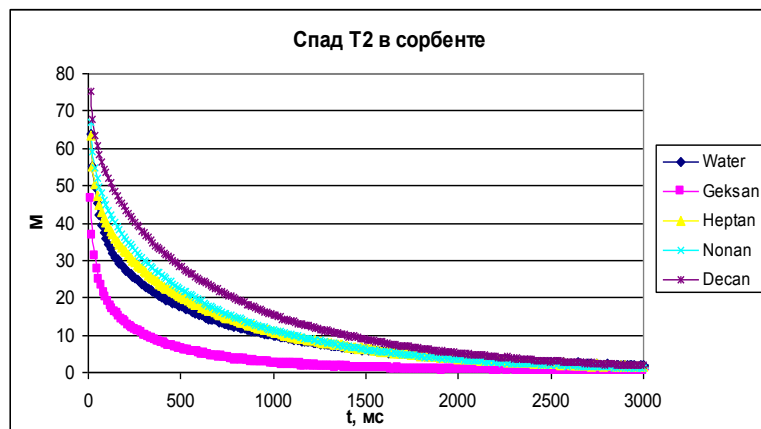
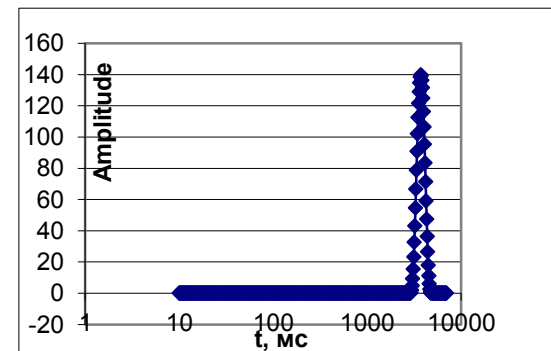
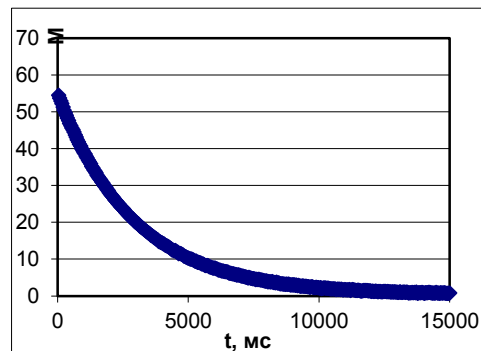
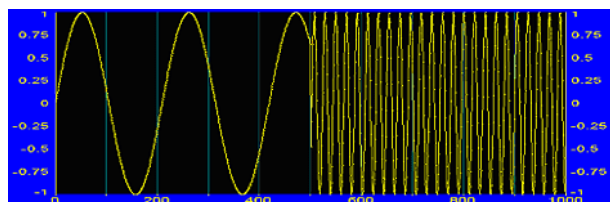
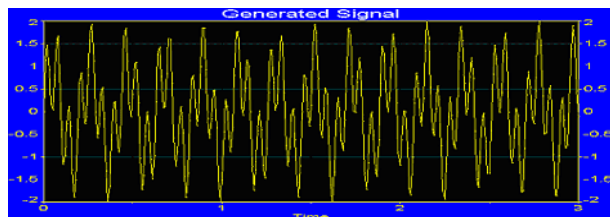
$$\int_0^{\tau} f(t) dt \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p}$$

$$p = a + i\sigma$$



Не только Фурье

Лаплас





Вейвлет-преобразование

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

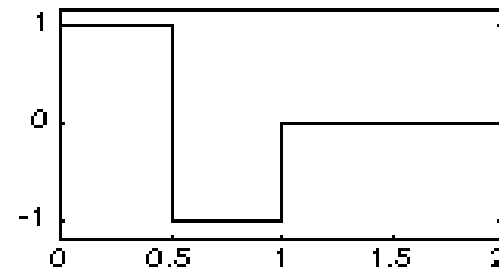
$$f(t) = \iint_{0,-\infty} W(a,b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dad b}{a^2}$$

Требования к ψ : локализация, ограниченность

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$$

HAAR - вейвлет

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & t < 0, t \geq 1 \end{cases}$$

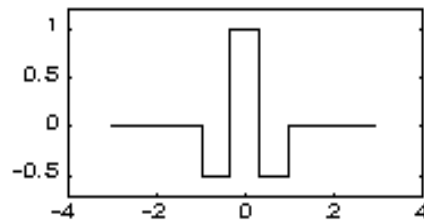




Вейвлет-преобразование

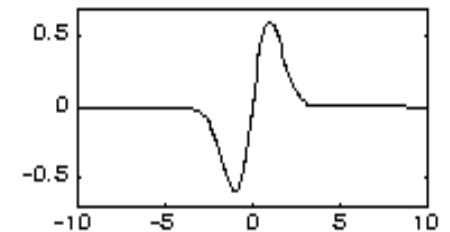
FNAT - вейвлет ("Французская шляпа" - French hat)

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/3 \\ -1/2, & 1/3 < |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$



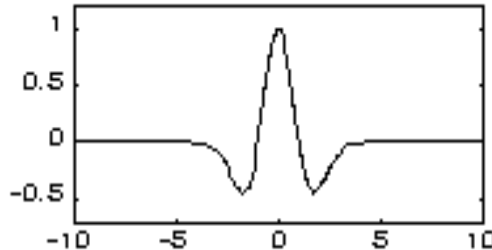
Wave - вейвлет

$$\psi(t) = t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$



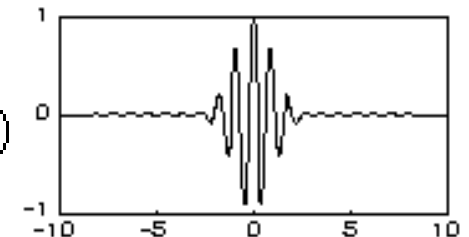
MHAT - вейвлет ("Мексиканская шляпа" - Mexican hat)

$$\psi(t) = (1 - t^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$



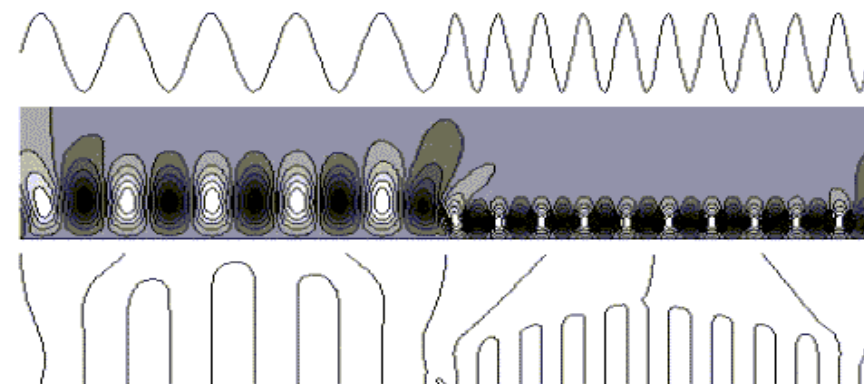
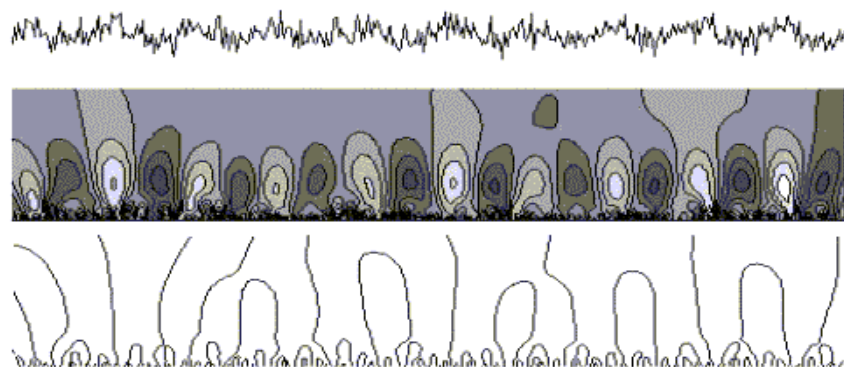
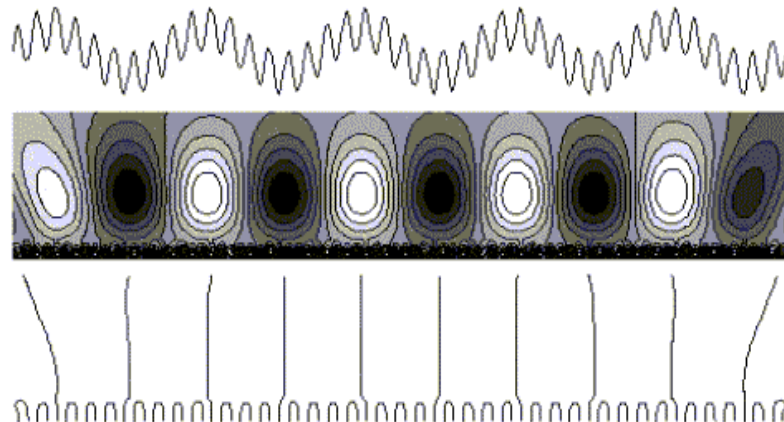
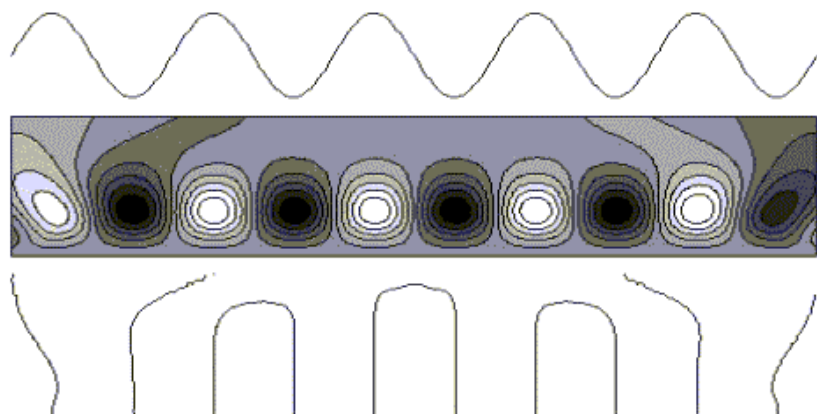
Вейвлет Морле (образует комплексный базис)

$$\psi(r) = \exp\left(ik_0 r - \frac{r^2}{2}\right)$$





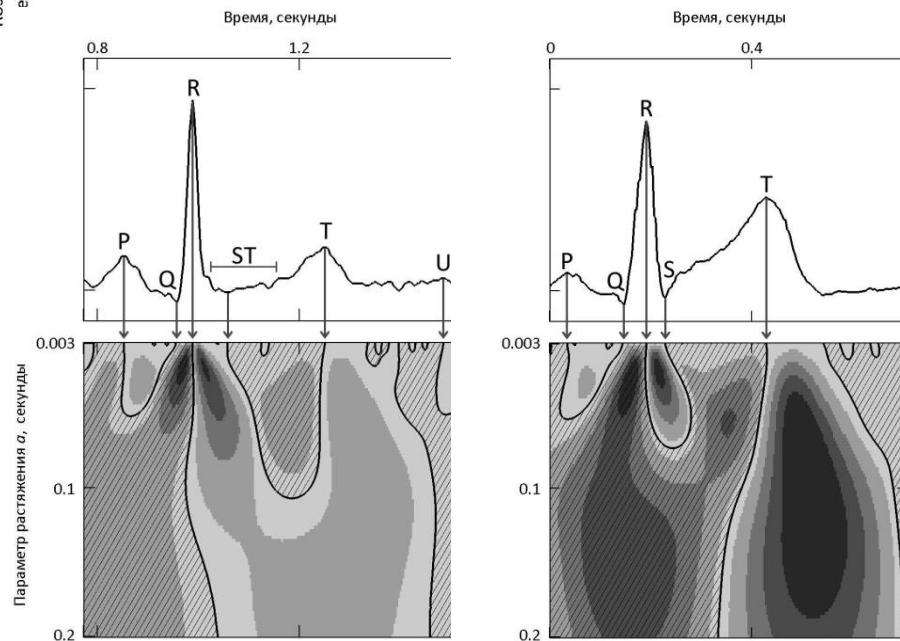
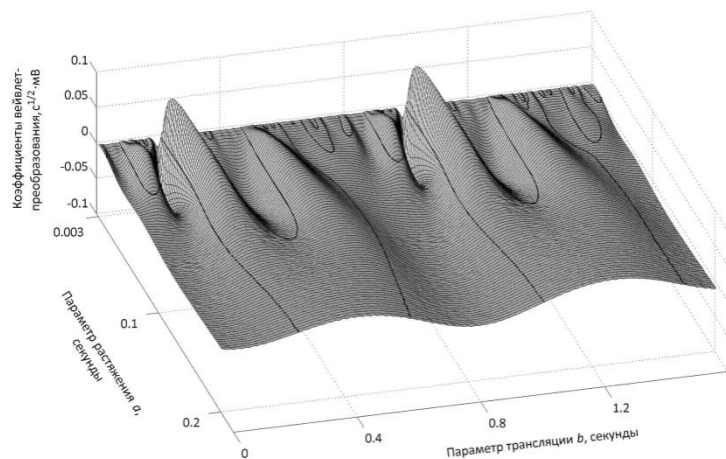
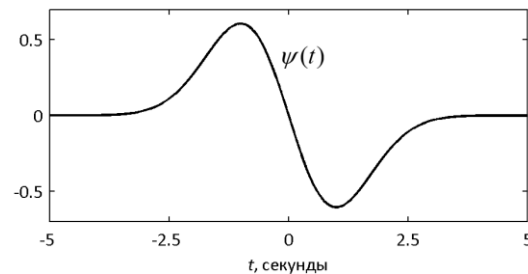
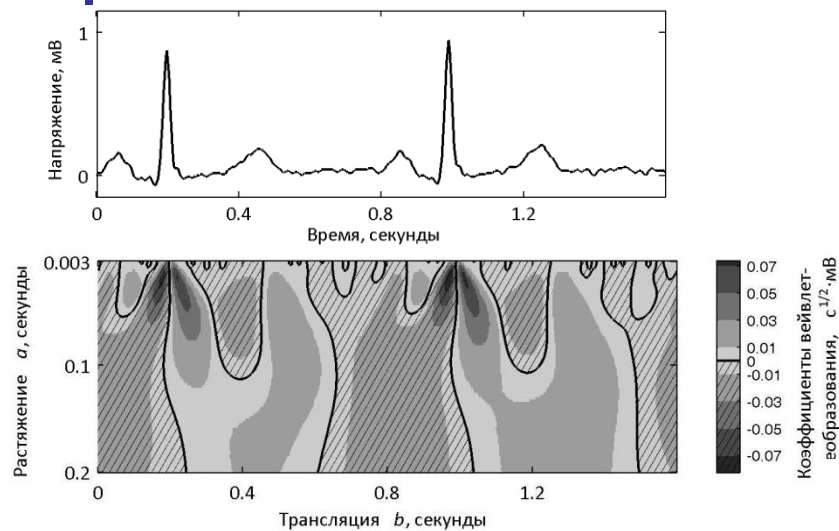
Вейвлет-преобразование





Топологические основы классификации электрокардиограмм

И.А. Романец, В.А. Атопков, Г.Т. Гурия
КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2012 Т. 4 № 4 С. 895–915

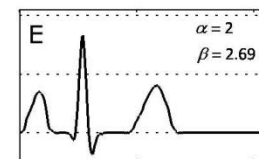
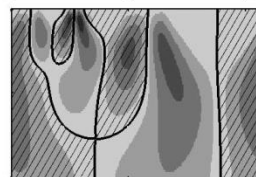
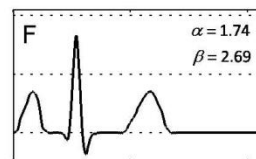
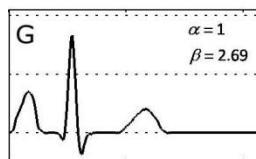
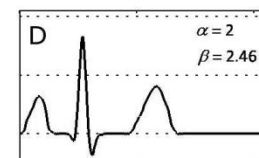
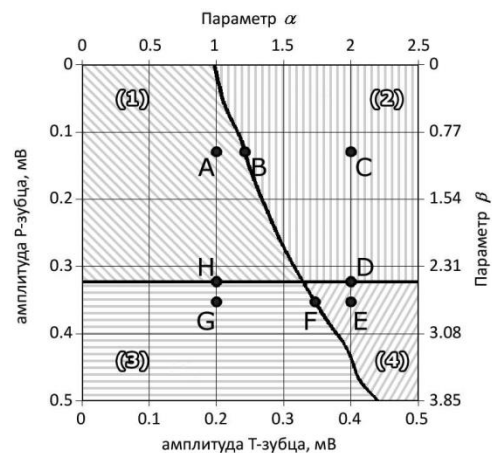
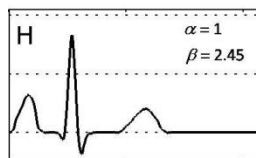
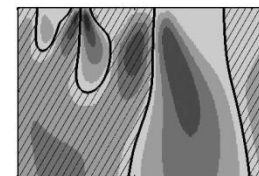
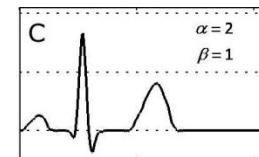
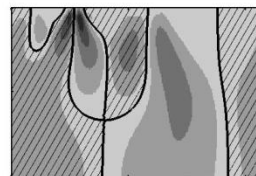
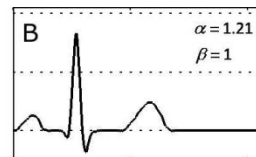
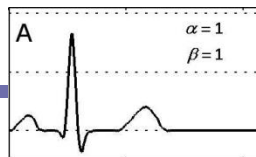




Классификация электрокардиограмм

И.А. Романец, В.А.
Атопков, Г.Т. Гурия
КОМПЬЮТЕРНЫЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ

И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2012 Т. 4 № 4
С. 895–915





Временные ряды

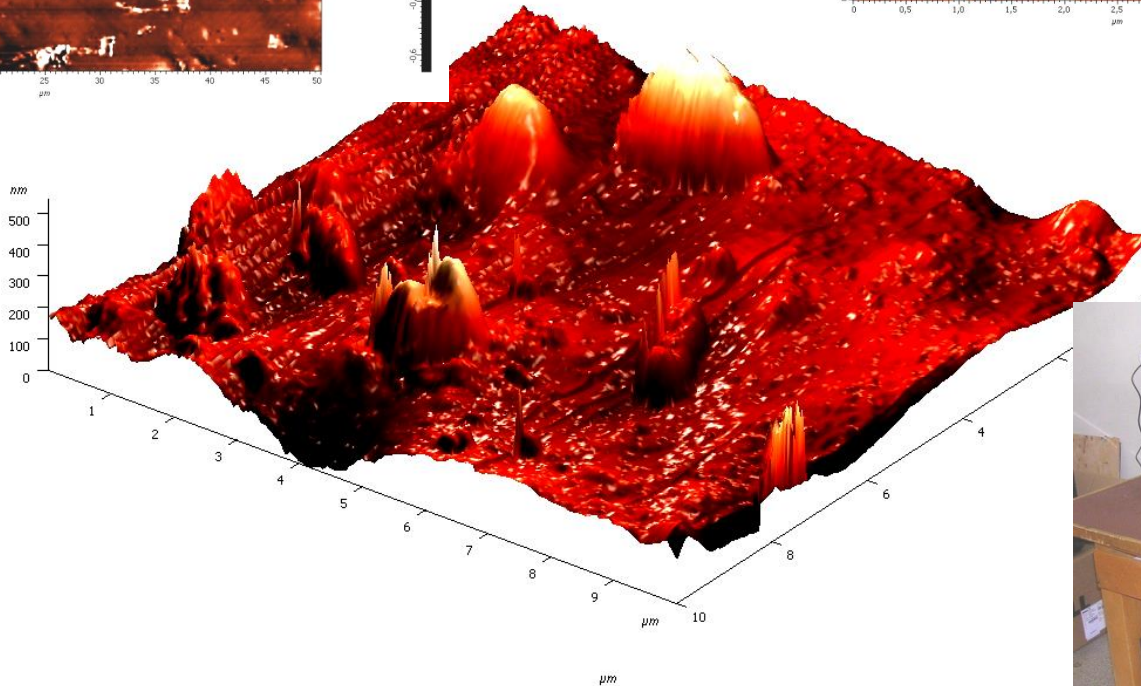
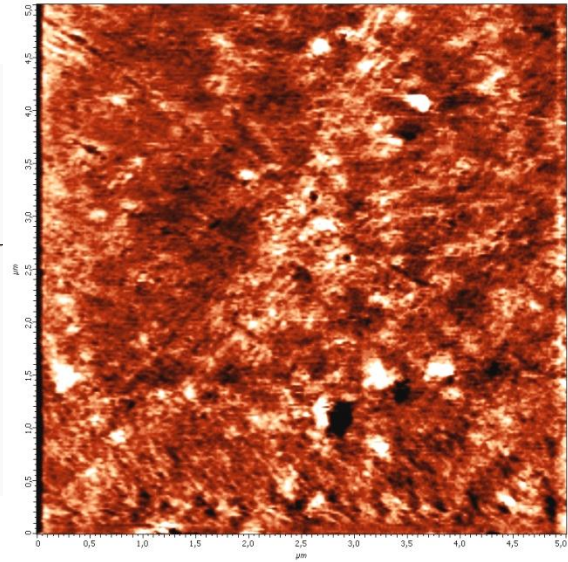
Интегральные преобразования – корреляция с базисной функцией

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Автокорреляционная функция

$$G(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(t + \tau) R(t) dt$$

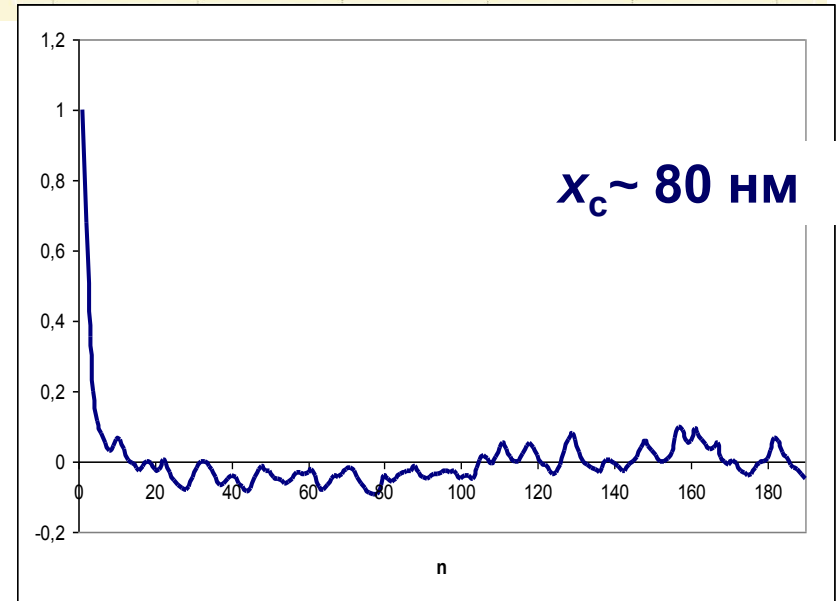
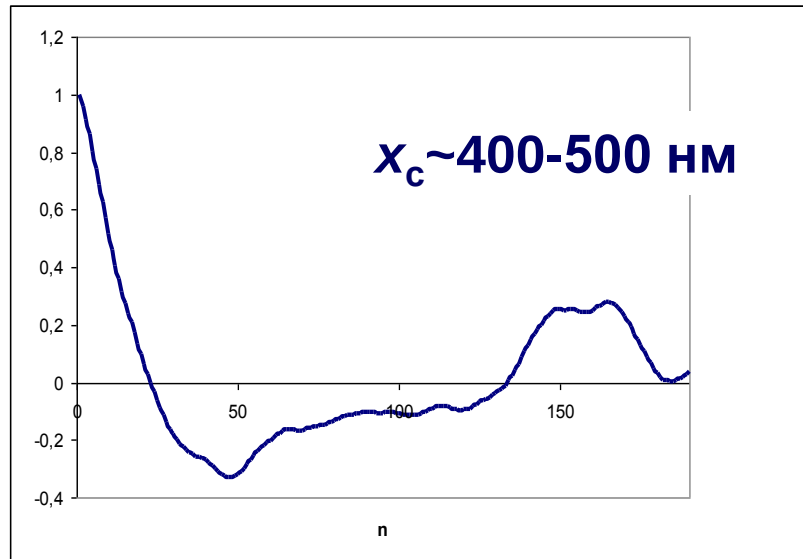
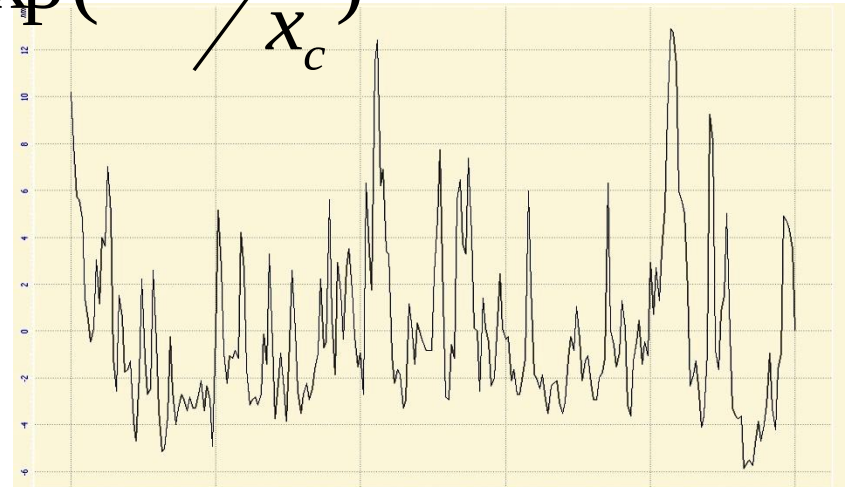
$$G(\Delta x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L R(x + \Delta x) R(x) dx$$





Автокорреляционная функция

$$G(\Delta x) \sim \exp(-\Delta x / x_c)$$





Литература

Максимычев А.В. Физические методы исследования.
1. Погрешности измерений. М., МФТИ, 2006.

Стариковская С.М. Физические методы исследования.
Семинарские занятия. 1.1. Учет погрешностей при обработке результатов измерений: М: МФТИ, 2003

Клаассен К.Б. Основы измерений. Электронные методы и приборы в измерительной технике. М. Постмаркет, 2000.

Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. М. Мир, 1985.

Худсон Д. Статистика для физиков. М. Мир, 1970

Гланц С. Медико-биологическая статистика. М. Практика, 1999

Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.
М. Высшая школа, 2002.