

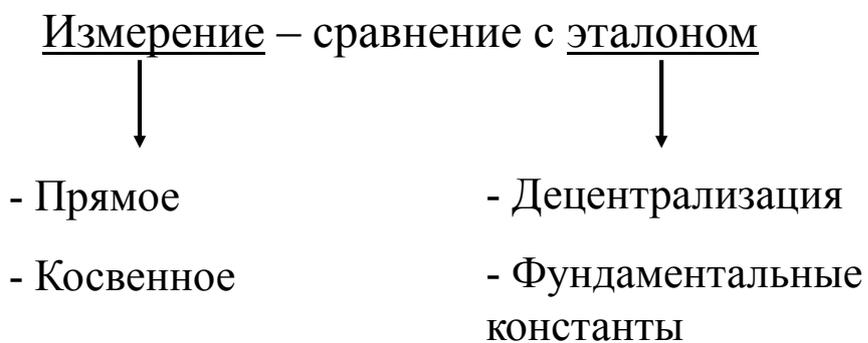
Московский физико-технический институт
(Государственный университет)
Департамент молекулярной и биологической физики

Физические методы исследования

Лекция 2

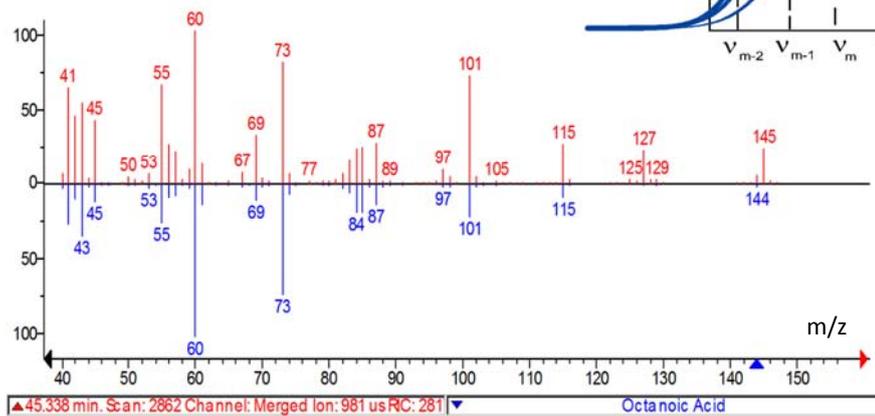
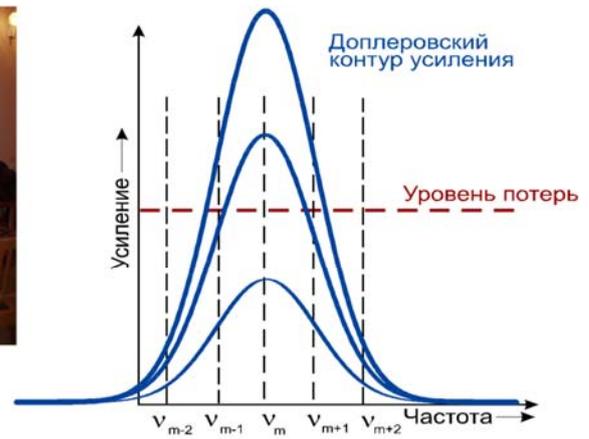
Общие проблемы измерений

г. Долгопрудный, 16 февраля 2017г.



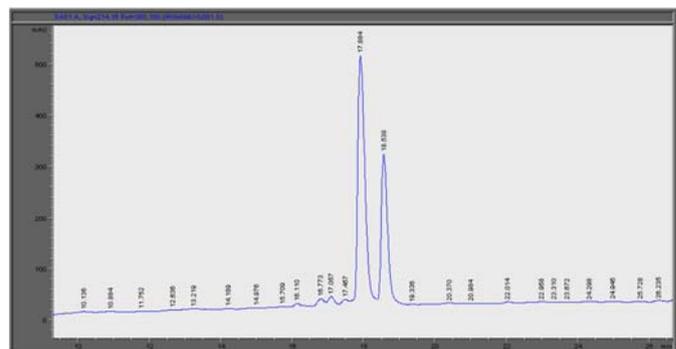
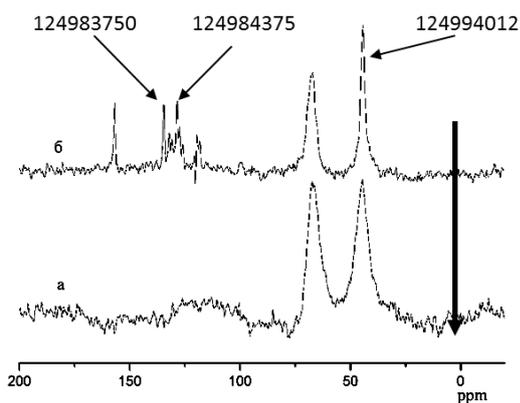
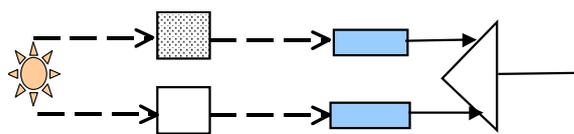
Методы измерений

- Отклонений
- Разностный
- Нулевой



Методы измерений

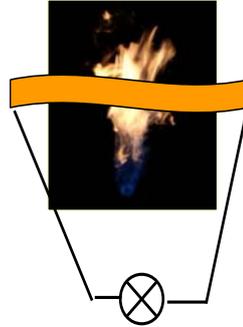
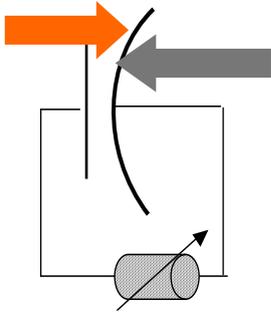
- Отклонений
- Разностный
- Нулевой



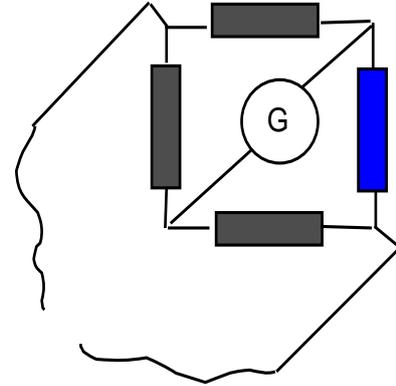
Методы измерений

- Отклонений
- Разностный
- Нулевой

Датчик механических смещений Яркостный пирометр



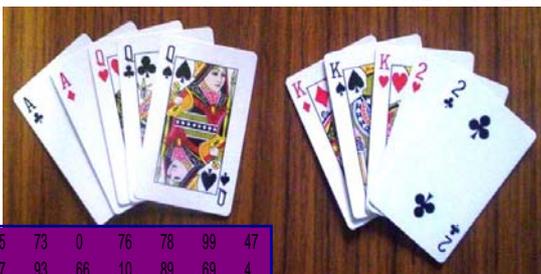
Мост Уитстона



Случайные величины



$\pi =$ 3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
 8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128
 4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091
 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
 7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436
 7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
 3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548
 0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912



39	56	74	65	73	0	76	78	99	47
66	75	57	57	93	66	10	89	69	4
89	100	13	16	83	23	62	19	13	5
51	73	85	74	61	89	86	38	25	3
3	3	39	33	58	46	50	57	92	70
49	94	27	18	50	100	8	93	2	78
0	13	78	82	78	75	18	72	52	80
82	16	60	32	34	91	42	88	70	17
70	45	65	5	48	29	76	17	64	49
44	52	40	42	56	76	21	35	32	95



Случайные величины

Теория

Задана $\rho(x)$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \rho(x) dx$$

$$D = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 \rho(x) dx$$

Эксперимент

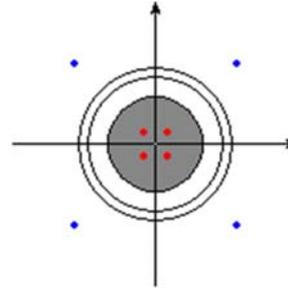
$\rho(x)$ неизвестна

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

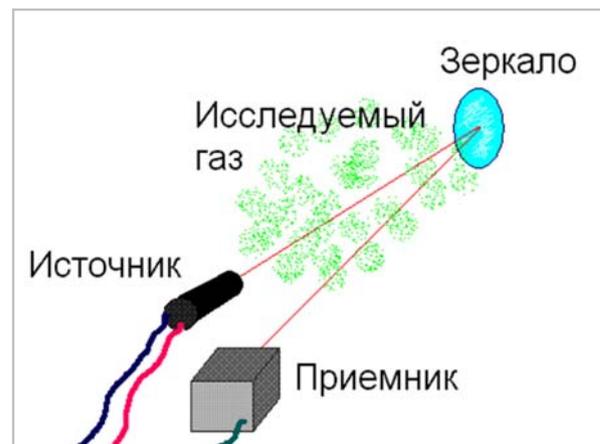
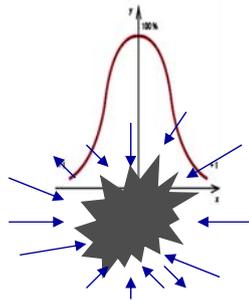
$$D = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

Дисперсия 2!!



Распределение Гаусса - ЦПТ

- Стационарность
- Независимость
- $N \rightarrow \infty$
- $\delta x \rightarrow 0$

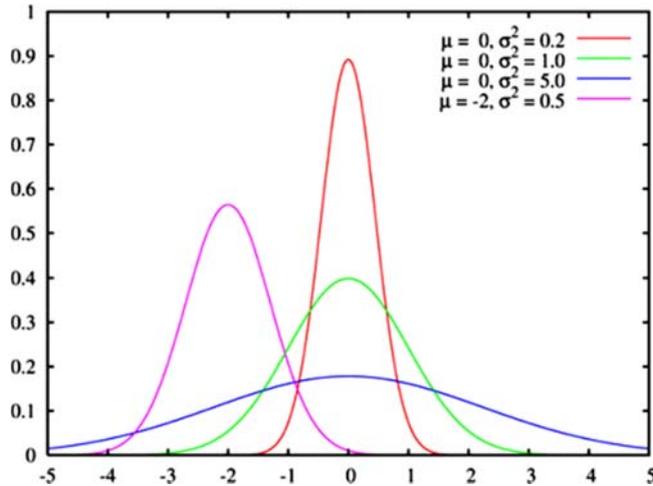


$$W = \frac{\xi x^2}{2}$$

$$P(W) \approx \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{\xi x^2}{2kT}\right);$$

$$\langle x \rangle = 0; \sigma^2 = \frac{kT}{\xi}$$

Распределение Гаусса



$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\rho_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$\frac{\rho_{\max}}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2e\pi}} = 0,606 \cdot \rho_{\max}$$



Биномиальное ↔ нормальное распределения

Биномиальное распределение

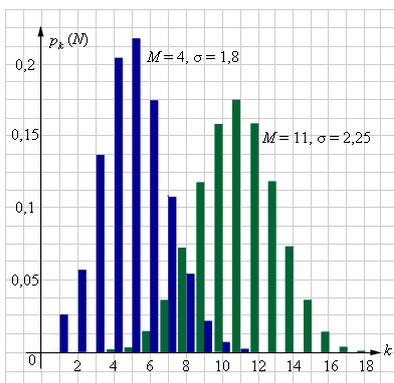
$$P_N(n) = C_N^n p^n q^{N-n}$$

$$\bar{n} = Np \quad \sigma^2 = Npq$$

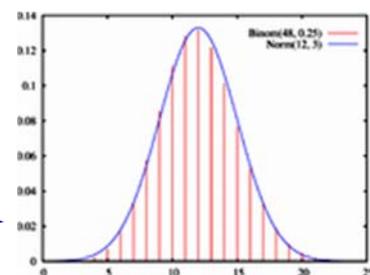
$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

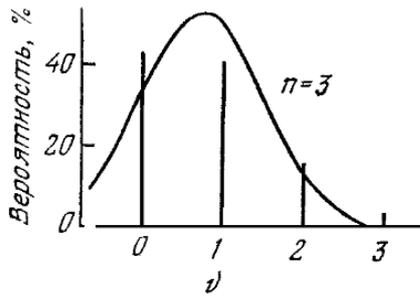
При $N \rightarrow \infty$ и $p = \text{const}$ биномиальное распределение переходит в распределение Гаусса

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} \exp\left[-\frac{(n-Np)^2}{2Npq}\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\sigma^2}\right]$$



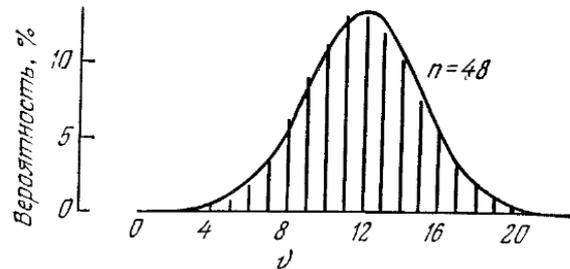
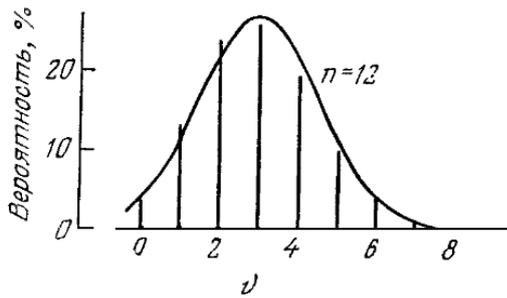
$N \rightarrow \infty, p = \text{const}$



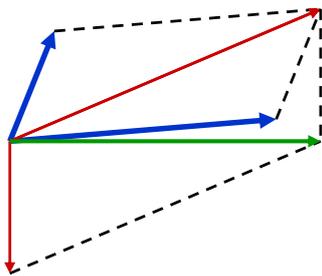


Биномиальные распределения с $p=1/4$ и $n=3, 12$ и 48

Непрерывная кривая на каждом графике – функция Гаусса с тем же средним и тем же стандартным отклонением



Сложение и «распространение» ошибок



$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

Косвенные измерения

$$x = f(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \dots) + \Delta f$$

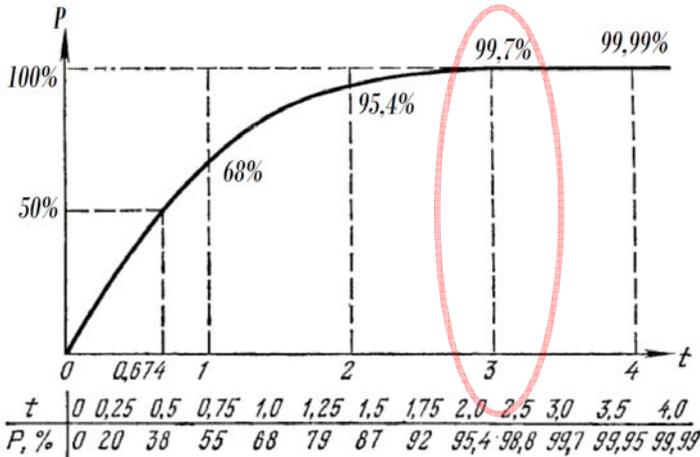
$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial f}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial f}{\partial r} \Delta r + \dots$$

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 \sigma_p^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2 \sigma_q^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 + \dots$$

Интеграл ошибок

$$P(a,b) = \frac{\int_a^b \rho(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx} \quad \longrightarrow \quad P(a,b) = \int_a^b \rho(x) dx$$

$$P_\delta = P(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}+\delta} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] dx \quad \text{пусть } z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$$

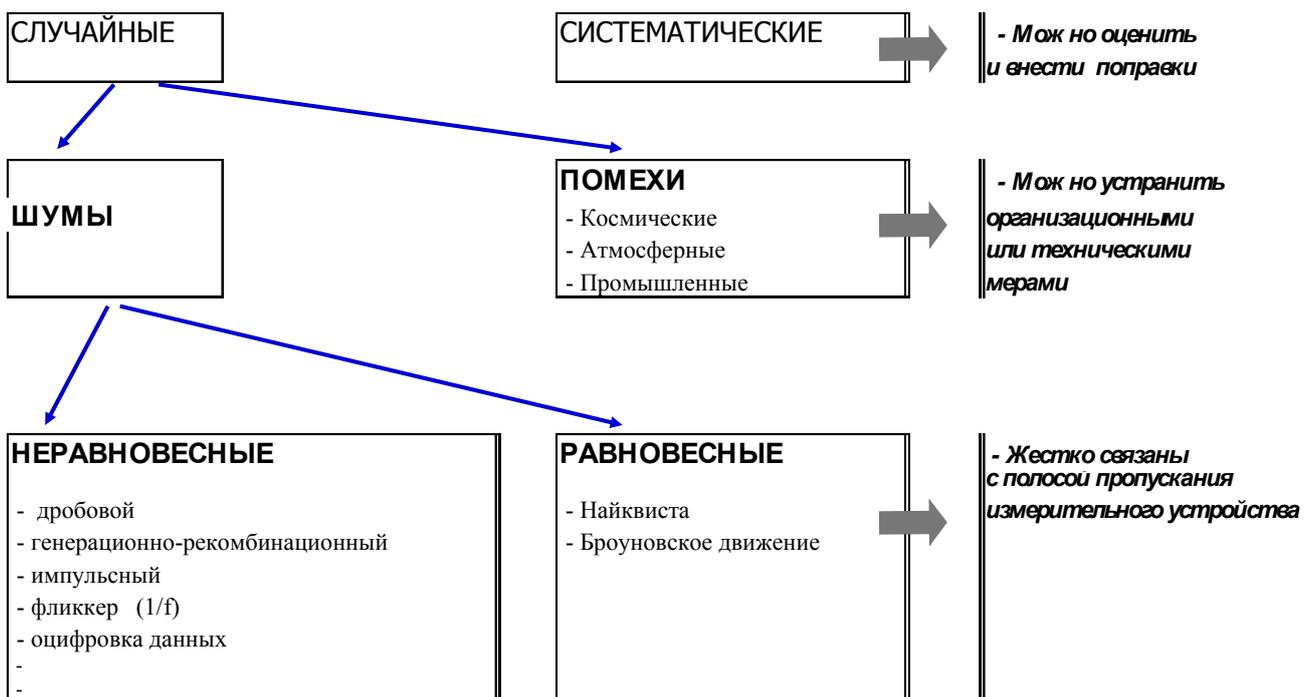


$$P_\delta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta/\sigma}^{+\delta/\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \sigma dz =$$

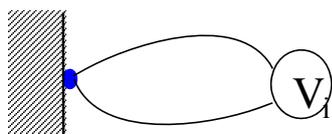
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta/\sigma}^{+\delta/\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \equiv \operatorname{erf}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Правило «3σ» !!!

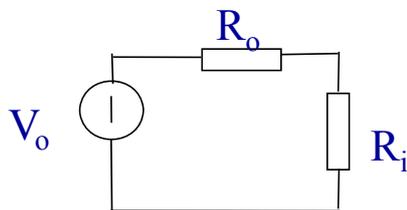
Погрешности измерений



Систематическая погрешность

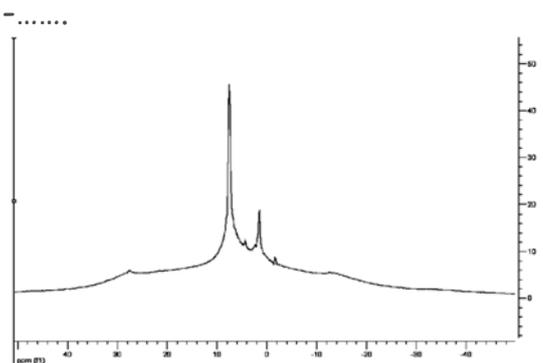
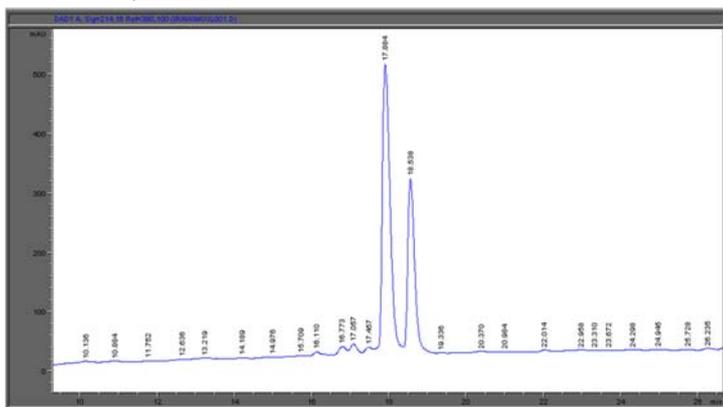


$$V_i = V_0 \frac{R_i}{R_0 + R_i}$$



Влияние процесса измерения на систему

- препаративные процедуры ("soft matter")
- нестабильность во времени
- неоднородность в пространстве



Систематическая погрешность

Термо-ЭДС

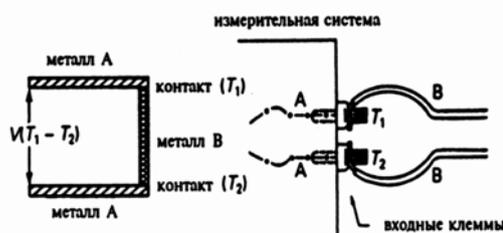
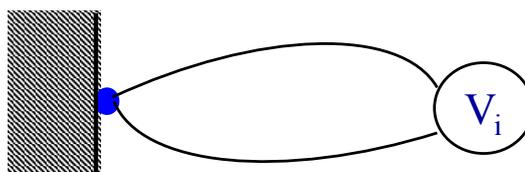
$$\Delta V = \alpha \cdot \Delta T$$

$$\alpha = 3 \text{ мкВ/К}$$

Cu-Pb/Sn

$$\alpha = 1000 \text{ мкВ/К}$$

Cu-Cu/O



- неоднородность в пространстве

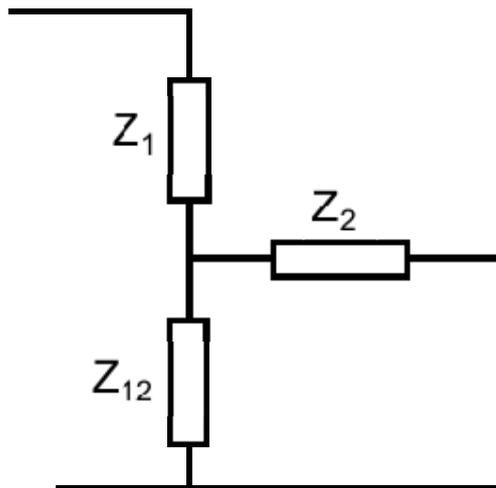
$$\Delta \phi_{21} = \frac{kT}{ze} \ln \frac{C_2}{C_1}$$

3-н Нернста для растворов

Помехи

- Космические
- Атмосферные
- Промышленные

$$k_{21} = \frac{P_{21}}{P_1}$$



Характер связи контуров:

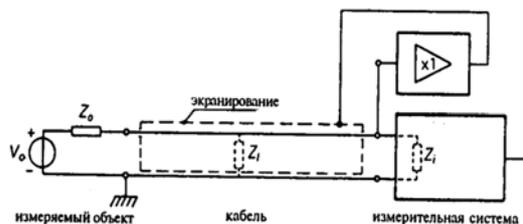
Резистивный $z_{12} \equiv R$

Емкостной $z_{12} \equiv \frac{1}{j\omega C}$

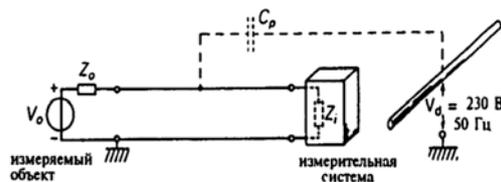
Индуктивный $z_{12} \equiv j\omega L$

Помехи

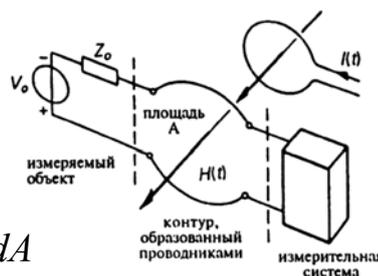
Токи утечки ($Z_{12}=R$)



Емкостная наводка
($Z_{12}=1/i\omega C$)

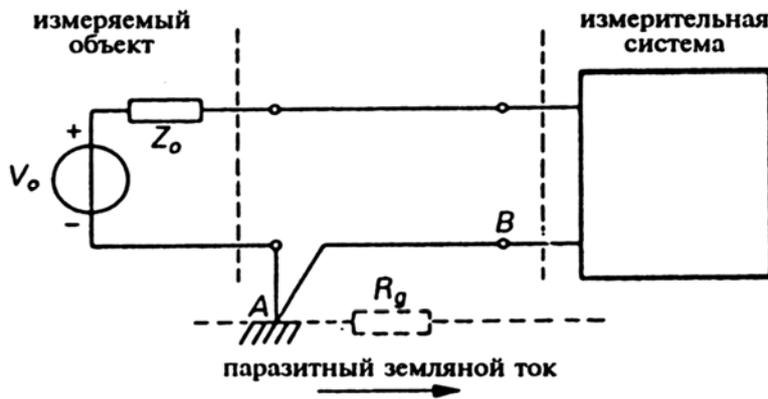
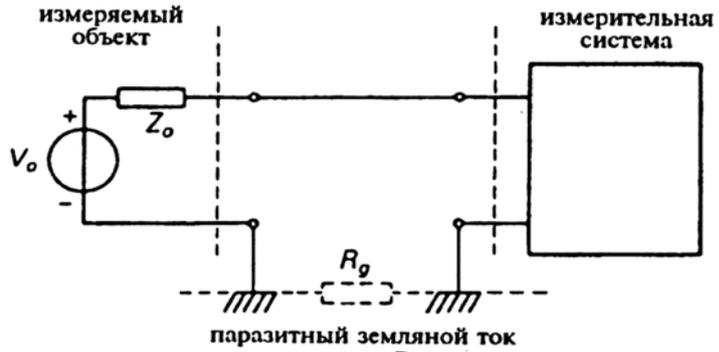


Индуктивная наводка
($Z_{12}=i\omega L$)



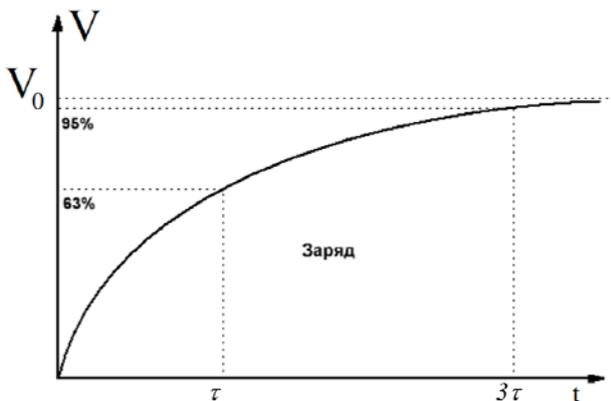
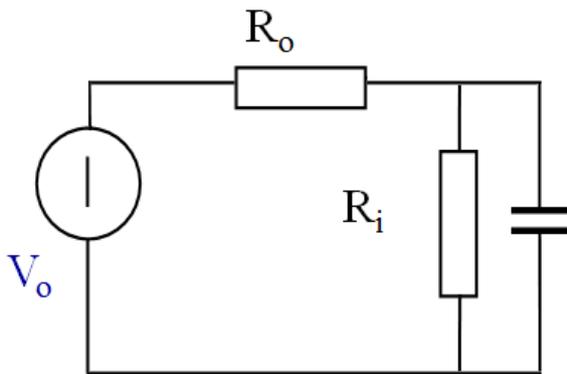
$$V_d = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_A H dA$$

Заземление



Заземлять в одной точке !!!

Время измерения



$$I_R = I_0 - I_c$$

$$q = CV_i; I_c = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_i}{dt}$$

$$V_i = I_R R_i = R_i (I_0 - I_c) =$$

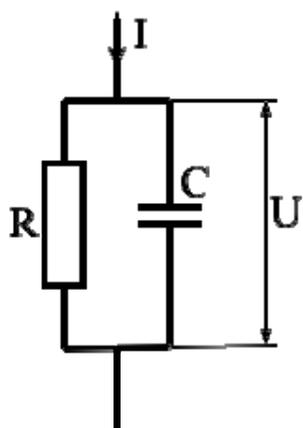
$$= V_{i\infty} - R_i C \frac{dV_i}{dt}$$

$$\frac{dV_i}{V_i - V_{i\infty}} = - \frac{dt}{R_i C}$$

$$V_i = V_{i\infty} \left(1 - \exp \left\{ - \frac{t}{\tau} \right\} \right)$$

$$\tau = R_i C$$

Амплитудно-частотная характеристика



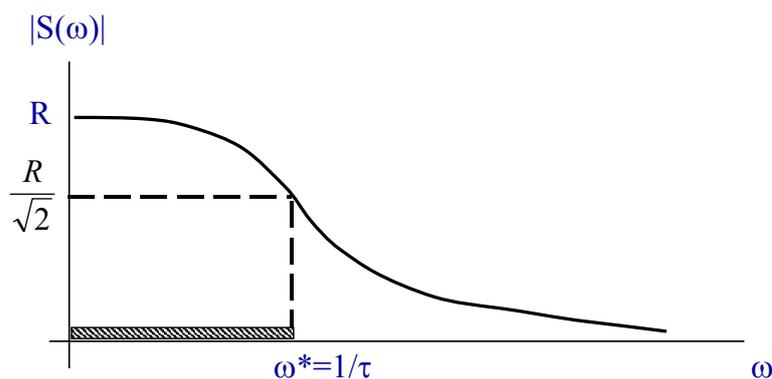
$$x \equiv I; y \equiv U; S = \frac{y}{x}$$

$$U = ZI = I \frac{Z_R Z_C}{Z_R + Z_C}$$

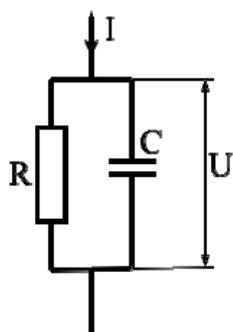
$$S = Z = \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R(1 - j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$AЧХ \equiv |S(\omega)|$$

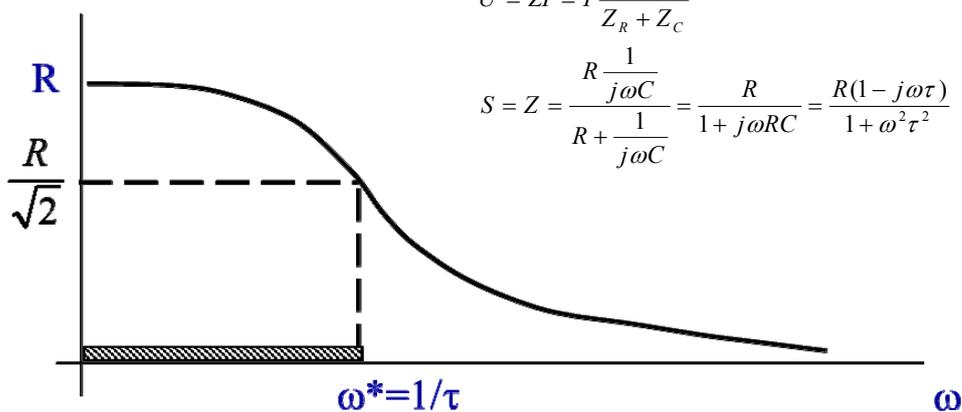
$$|S(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$



Амплитудно-частотная характеристика



$$|S(\omega)|$$



$$x \equiv I; y \equiv U; S = \frac{y}{x}$$

$$U = ZI = I \frac{Z_R Z_C}{Z_R + Z_C}$$

$$S = Z = \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R(1 - j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2}$$

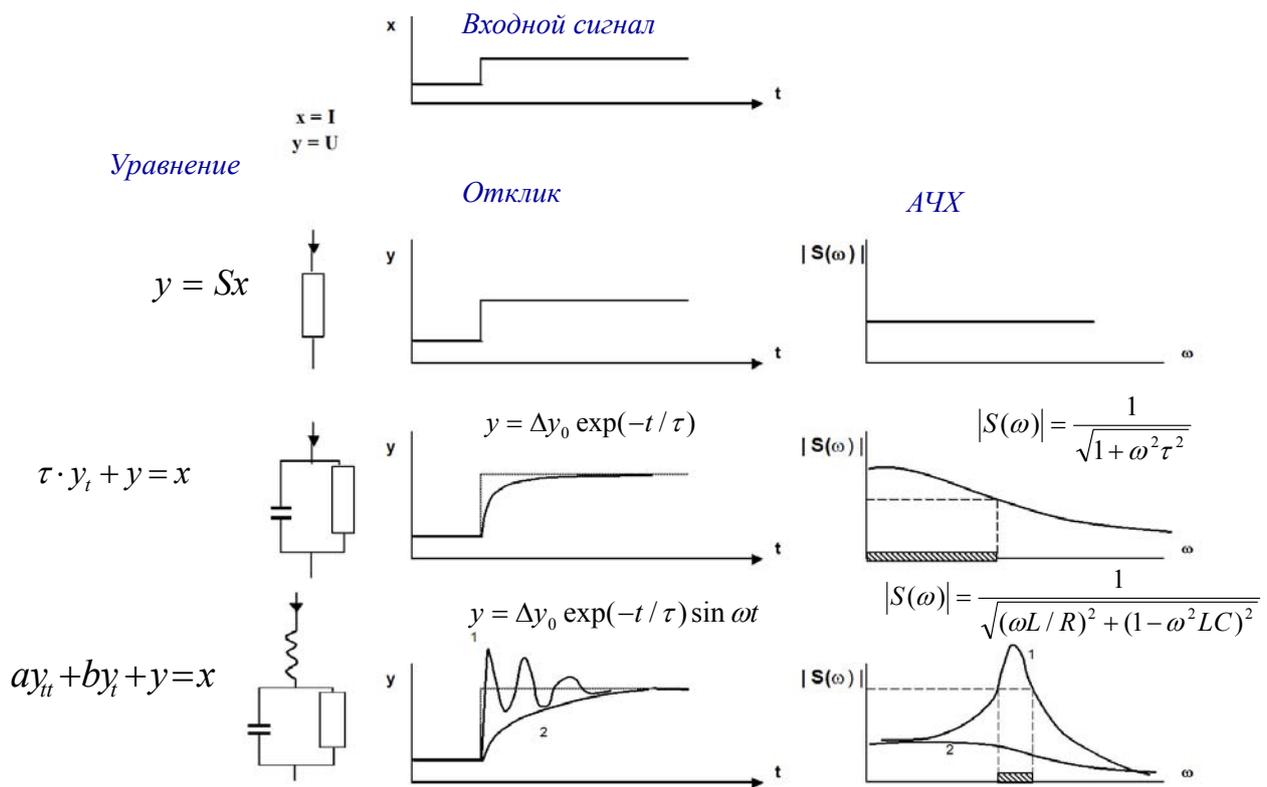
$$AЧХ \equiv |S(\omega)|$$

$$|S(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$Re(S) = \frac{R}{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$Im(S) = -\frac{R\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

АЧХ и функция отклика

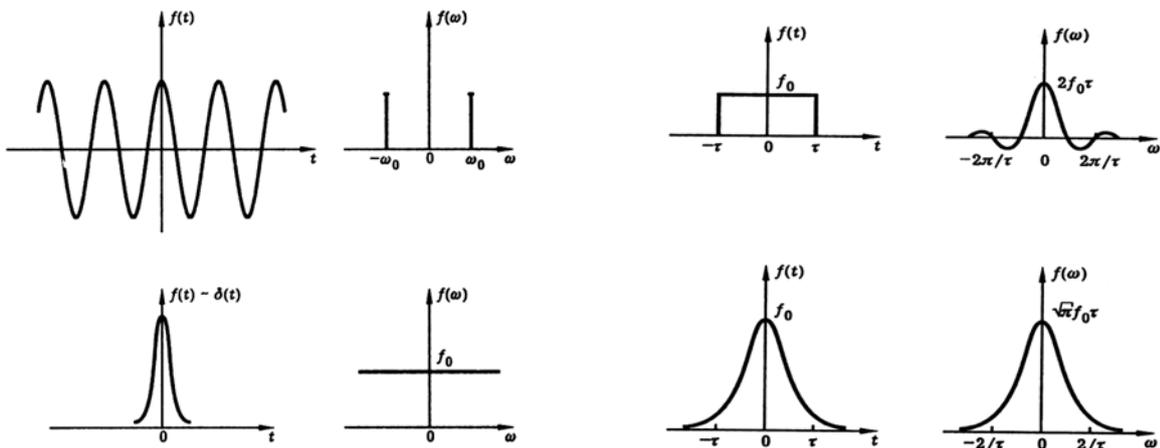


Преобразование Фурье

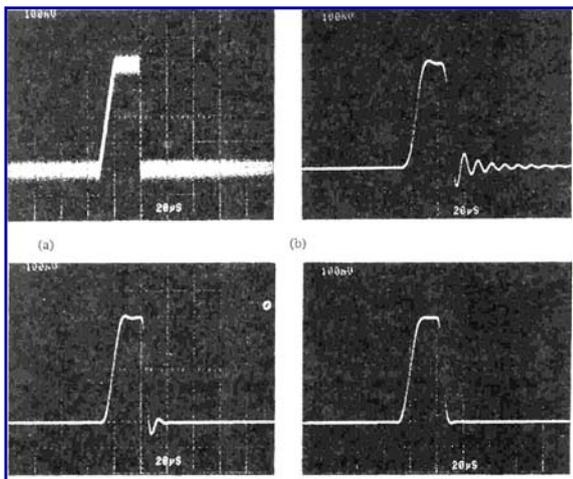
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

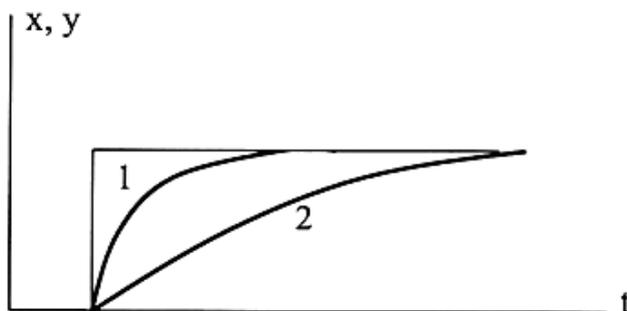
$$\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 1$$



Полоса пропускания и время отклика



1 - широкополосная система



2 - узкополосная система

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 1$$

Характеристики измерительных систем

Чувствительность

$$S = \frac{y}{x} \quad S_{dif} = \frac{dy}{\delta x}$$

X – входной сигнал
Y – выходной сигнал

Разрешающая
способность

$$R = \frac{x}{\delta x}$$

Динамический
диапазон

$$D = \frac{x_{\max}}{x_{\min}} \rightarrow \frac{x_{\max}}{\delta x}$$

Пространственное
разрешение

$$\delta x = \int_S x_S dS = \int_V x_V dV$$

Время измерения

$$\delta x = \int_{\tau} x(t) dt$$

δx – порог обнаружения !!!

Литература

Максимычев А.В. Физические методы исследования. 1. Погрешности измерений. М., МФТИ, 2006.

Стариковская С.М. Физические методы исследования. Семинарские занятия. 1.1. Учет погрешностей при обработке результатов измерений: М.: МФТИ, 2003

Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. М. Мир, 1985.

Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М. Высшая школа, 2002.

Х.-И. Кунце Методы физических измерений. М. Мир, 1989.

Н.С. Маркин Основы теории обработки результатов измерений, М.: Издательство стандартов, 1991. — 176 с.

Харт Х. Введение в измерительную технику. М. Мир, 1999.

М.И. Пергамент Методы исследований в экспериментальной физике. Изд-во Интеллект, 2010

Lib.mipt.ru