

**Максимычев А.В.**

**Физические методы исследования. Конспект лекций.  
2. Сигналы в длинных линиях.**

**Учебно-методическое пособие.**

Пособие является второй частью конспекта лекций по физическим методам исследования, издаваемых в рамках инновационной образовательной программы МФТИ. Основное внимание обращено на физический смысл, наглядность и аналогии, позволяющие углубить теоретические основы в области передачи сигналов в современных физических исследованиях.

Предназначено для студентов 3-4 курсов факультета молекулярной и биологической физики, изучающих курс «Физические методы исследования» (в том числе применительно к направлению «Живые системы»).

## Содержание

Введение.....	4
1. Телеграфные уравнения.....	5
2. Сосредоточенные и распределенные системы.....	9
3. Фазовая скорость.....	11
4. Соотношение между напряжением и током. Волновое сопротивление.....	14
5. Отражение волн. Согласование линии и нагрузки.....	16
6. Согласованная линия: соотношение Найквиста.....	20
7. Входное сопротивление нагруженной линии.....	23
8. Способы согласования: резистор, шлейф, четвертьволновая линия.....	25
9. Реальная линия с потерями.....	29
10. Линия с малыми потерями. Неискажающая линия.....	31
11. «Поперечно длинная» линия: скин-эффект.....	33
12. «Поперечно длинная» линия: волновод.....	36
Список литературы.....	43

## Введение

Данное пособие является второй частью конспекта лекций по физическим методам исследования, изданной в рамках реализации инновационной образовательной программы МФТИ. Передача сигналов по длинным линиям традиционно относится к основам электротехники и почти не затрагивается в курсах общей физики. Рассмотрение этой темы в базовом курсе методов исследования оправдано и необходимо потому, что на практике измеряемые величины почти всегда преобразуются в электрические сигналы, и экспериментатор сталкивается с необходимостью передавать сигналы от одного устройства к другому. Например, детектор и регистратор сигналов могут быть разнесены и связаны кабелем; в процессе компьютерной обработки данных происходит обмен данными между удаленными элементами оборудования. Незнание основных закономерностей передачи сигналов по линиям может привести к искажению, зашумлению и полной потере передаваемой информации. Наибольшие трудности обычно возникают при работе с высокочастотными и импульсными сигналами, которые часто используются в современном эксперименте.

Основные особенности распространения сигналов в линиях строго следуют из математического описания физической модели распределенной электрической цепи. Вместе с тем, полезно помнить о том, что движение электрического сигнала по линии представляет собой одну из многих разновидностей волновых процессов. Возникновение волн при переходе от точечных колебательных систем к распределенным подчиняется общим физическим закономерностям независимо от природы систем. Общность волновых процессов в механических, электрических, оптических системах проявляется в явлениях дисперсии, отражения, интерференции, рассеяния волн. Использование аналогий между электрическими, механическими и оптическими волнами зачастую упрощает пони-

мание физического смысла наблюдаемых явлений и их влияния на проведение измерений.

## 1. Телеграфные уравнения

Необходимость изучения процесса передачи сигналов на большие расстояния остро встала после того, как в 1857-1866 гг. через Атлантический океан был проложен электрический кабель из Ирландии в Америку. Длина кабеля превышала 4000 км, кабель залегал на глубинах до 4500 м, рабочее напряжение составляло 2 кВ. Прокладка кабеля потребовала решения сложных инженерных задач и удалась только с пятой попытки. При использовании линии обнаружилось, что передаваемые по кабелю сигналы испытывают сильные искажения и не поддаются расшифровке. Решить эту проблему удалось Оливеру Хевисайду, внесшему существенный вклад в развитие теории электромагнетизма и математической физики.

При рассмотрении электромагнитных колебаний в электрических цепях существенным оказывается соотношение между геометрическими размерами, характеризующими передающую линию, и длиной волны  $\lambda$  передаваемого сигнала. *Длинной линией* называют электрическую цепь, образованную двумя параллельными проводниками, длина которых  $L \gg \lambda$ , расстояние между проводниками  $b \ll \lambda$ , поперечный размер проводников  $a \ll \lambda$ . Рассмотрение данной линии как «длинной» или «короткой» зависит от частоты передаваемых сигналов: при частоте  $\nu = 50$  Гц линия ведет себя как «длинная», если ее протяженность превышает  $\lambda = c/\nu = 3 \cdot 10^8 / 50 = 6 \cdot 10^3$  км, в области высокочастотных сигналов эффекты длинной линии могут проявиться в кабелях длиной  $\sim 1$  м, обычных для лабораторной практики.

Следуя Хевисайду, в качестве модели длинной линии рассмотрим цепь, включающую источник напряжения, двухпроводную линию и импеданс нагрузки  $Z_n$  (рис. 1).

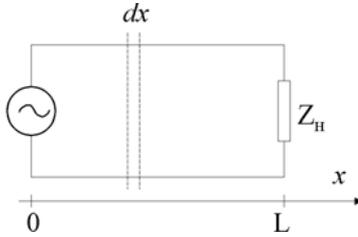


Рис. 1. Модель нагруженной длинной линии

Бесконечно малый участок линии протяженностью  $dx$  можно представить в виде эквивалентной электрической схемы, приведенной на рис. 2. Двухпроводная линия обладает индуктивностью  $L$ , активным сопротивлением  $R$ , межпроводной емкостью  $C$  и проводимостью утечки через изоляцию  $G$  – эти величины, *отнесенные к единице длины* линии, представлены на схеме (рис. 2). Следует подчеркнуть, что рассматриваются *погонные* величины (на это указывает индекс  $x$ ), размерность которых отличается от привычной размерности электрических величин: погонное сопротивление  $[R_x] = \text{Ом/м}$ , погонная емкость  $[C_x] = \text{Ф/м}$  и т.д.

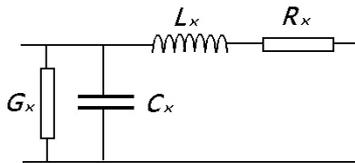


Рис. 2. Эквивалентная схема бесконечно малого отрезка длинной линии

Падение напряжения  $dU$  на участке  $dx$  обусловлено протеканием тока через последовательно включенные элементы  $L$  и  $R$ , изменение на участке  $dx$  тока  $I$ , протекающего в положительном направлении оси  $x$ , обусловлено его ответвлением в параллельные элементы  $C$  и  $G$ . (Здесь и далее для

краткости индексы опустим, помня при этом, что используются погонные величины.) Эти соображения позволяют записать балансные уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= -L \frac{\partial I}{\partial t} - IR, \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -C \frac{\partial U}{\partial t} - UG.\end{aligned}\tag{1}$$

Система (1) получила название *телеграфных уравнений*; эти уравнения являются базовыми для анализа распространения сигналов в линиях. (Название “l'equation des telegraphistes” предложено А. Пуанкаре в 1897 г.)

Телеграфные уравнения в форме (1) являются математической моделью *реальной* линии, в которой происходит диссипация энергии на активных элементах  $R$  и  $G$ . Общие особенности передачи сигналов можно понять, рассмотрев упрощенную модель *идеальной* линии, в которой омические потери отсутствуют. Эквивалентная схема идеальной линии содержит только индуктивность и емкость и получается из схемы, приведенной на рис. 2, путем исключения активных элементов  $R$  и  $G$ . Телеграфные уравнения для идеальной линии имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= -L \frac{\partial I}{\partial t}, \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -C \frac{\partial U}{\partial t}.\end{aligned}\tag{2}$$

Для нахождения решения (2) продифференцируем первое уравнение по  $x$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -L \frac{\partial I}{\partial t} \right) = -L \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t} = -L \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial I}{\partial x} \right)$$

и подставим в полученное соотношение выражение для  $\partial I / \partial x$  из второго уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Переменные  $U$  и  $I$  входят в телеграфные уравнения симметрично, поэтому после соответствующих преобразований можно получить уравнение относительно  $I$ , аналогичное (3).

Уравнение (3) представляет собой *волновое уравнение*, стандартный вид которого

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Решением уравнения (4) является *любая* дважды дифференцируемая функция вида

$$U(x, t) = f\left(t \pm \frac{x}{v}\right), \quad (5)$$

в чем легко убедиться прямой подстановкой. Решение (5)

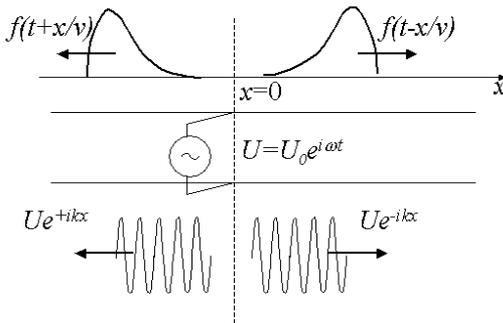


Рис. 3. Распространение волн в линии от источника, расположенного в точке  $x = 0$ .

описывает два возмущения, распространяющиеся в противоположных направлениях с постоянной конечной скоростью  $v$  (рис. 3). Общее название такого возмущения – *волна*. Знаку « $\leftarrow$ » в соотношении (5) соответствует волна, распространяющаяся в положительном направлении оси  $x$ , знаку « $\rightarrow$ » отвечает возмущение, движущееся в противоположном направлении. Таким образом, в случае идеальной линии теле-

графные уравнения сводятся к волновому уравнению (3), описывающему распространение волн напряжения или тока со скоростью  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  в положительном и отрицательном

направлениях вдоль оси  $x$ . Волны в идеальной линии являются незатухающими, их скорость не зависит от амплитуды и частоты. Скорость распространения волн определяется погонными индуктивностью и емкостью линии.

На наш взгляд, полезным является обсуждение общей природы явлений при переходе от точечных объектов к протяженным на примере электрических и механических систем.

## 2. Сосредоточенные и распределенные системы

Простейшим механическим осциллятором является масса  $m$ , связанная с пружиной жесткости  $k$ , электрическим аналогом такой системы является  $LC$ -цепочка (рис. 4). В идеальном осцилляторе происходят незатухающие колебания, в ходе которых потенциальная энергия превращается в кинетическую. Выражения для собственных колебательных частот  $\omega$  обоих типов осцилляторов имеют аналогичный вид:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad . \quad (6)$$

В  $LC$ -контуре аналогом константы упругости является величина  $1/C$ : потенциальная энергия колебаний сосредоточена в электрическом поле конденсатора. Инерционные свойства электромагнитных колебаний обусловлены наличием в контуре индуктивности  $L$ , магнитное поле является носителем кинетической энергии колебаний. Рассматриваемые колебательные системы, по сути, являются точечными. Функции  $f$ , описывающие изменение их состояния, зависят только от времени и относятся к фиксированной точке пространства  $f = f(t) |_{x_0}$ . Объекты такого типа называют системами с *сосредоточенными* параметрами.

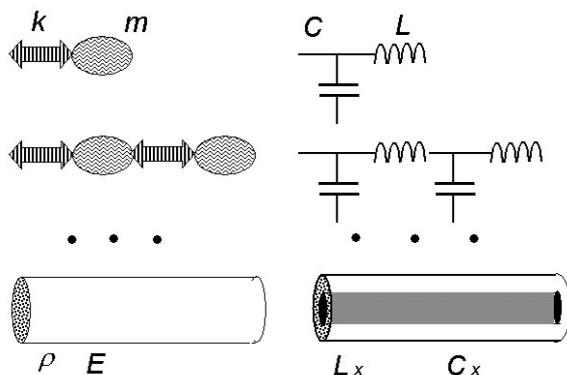


Рис. 4. Предельный переход от точечных осцилляторов к распределенным системам

Переход от точечных систем к протяженным можно представить как последовательное связывание множества точечных осцилляторов (рис. 4). Возмущение, создаваемое в некоторой точке, будет распространяться вдоль цепочки осцилляторов с некоторой конечной скоростью, и состояние элементов в разных пространственных точках будет неодинаково в любой заданный момент времени. Функции  $f$ , характеризующие поведение таких систем, должны явным образом учитывать зависимость состояния системы от координаты  $f = f(x, t)$  (см., например, (5)).

Результатом предельного перехода в цепочке связанных осцилляторов в случае механической системы будет одномерное твердое тело — струна, инерционные и упругие свойства которого распределены непрерывно по длине. В случае электрической системы мы приходим к длинной линии с *распределенными* индуктивностью и емкостью. Упругие и инерционные свойства распределенной механической системы характеризуют модуль Юнга  $E$  и плотность  $\rho$  соответственно. Способность длинной линии запасать энергию зарядов в статической и кинетической форме характеризуют

погонная емкость  $C_x$  и погонная индуктивность  $L_x$  соответственно (здесь используем индекс  $x$  для отличия от сосредоточенных параметров  $L$  и  $C$ ).

Выражения (6) при предельном переходе к распределенным системам трансформируются в соотношения для скорости распространения возмущений:

$$v_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v = \sqrt{\frac{1}{C_x L_x}} \quad (7)$$

( $v_s$  – скорость звука в твердом теле). Отметим, что формула, связывающая скорость  $c$  распространения света в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$  среды

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon\mu}} \quad (8)$$

имеет вид, аналогичный соотношениям (7). Величины  $\epsilon$  и  $\mu$  характеризуют статические и динамические свойства среды по отношению к электромагнитным возмущениям.

Таким образом, волновые процессы с необходимостью возникают в колебательных системах при условии  $L \gg \lambda$ . Распространение волн в системах различной физической природы сопровождается общими для всех волновых процессов явлениями: отражением, интерференцией, рассеянием, дисперсией и т.п.

### 3. Фазовая скорость

Рассмотрим линию (рис. 3), в которую при  $x = 0$  включен источник синусоидального напряжения, изменяющегося по закону

$$U(0) \equiv U_1 = U_0 e^{i\omega t} \quad (9)$$

(рассмотрение синусоидальных волн не ограничивает общности рассмотрения, поскольку каждый сигнал представим в виде интеграла или суммы различных гармоник). В любом

сечении линии сигнал будет также синусоидальным, поэтому справедливо выражение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\omega^2 U. \quad (10)$$

Частота  $\omega$  связана с периодом колебаний  $T$  известным соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (11)$$

Пространственный масштаб колебаний, по аналогии с (11), характеризует *волновое число*  $k$ :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (12)$$

( $\lambda$  — длина волны). Обозначая скорость распространения волны  $v$ , из (11) получим соотношение между частотой и волновым числом:

$$\omega = \frac{2\pi v}{Tv} = \frac{2\pi v}{\lambda} = kv. \quad (13)$$

Подставляя в волновое уравнение (4) производную по времени (10), получаем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{v^2} U = 0. \quad (14)$$

Согласно (13),  $\omega/v = k$ , подставляя это отношение в (14), приходим к уравнению:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + k^2 U = 0. \quad (15)$$

Решение уравнения (15) имеет вид

$$U(x) = A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x}, \quad (16)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — корни характеристического уравнения  $\alpha^2 + k^2 = 0$ . Находя корни  $\alpha_{1,2} = \pm ik$ , записываем решение (16) в виде

$$U(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}. \quad (17)$$

Решение (17) представляет собой как бы мгновенный снимок двух пространственных синусоидальных волн, направленных навстречу друг другу. Знак фазы второго слагаемого позволяет соотнести его с волной, движущейся в положительном направлении оси  $x$ . Будем считать эту волну «прямой», тогда первое слагаемое (17) по своему физическому смыслу соответствует отраженной волне.

Пусть отраженная волна в линии отсутствует (позже мы найдем условия, при которых это возможно), и решение (17) имеет вид

$$U(x) = A_2 e^{-ikx}. \quad (18)$$

Постоянная  $A_2$  находится из граничного условия (9), откуда  $A_2 = U_0 e^{i\omega t}$ , и решение (18) принимает вид

$$U(x, t) = U_0 e^{i(\omega t - kx)}. \quad (19)$$

Выражение (19) описывает *бегущую волну*: наблюдатель в фиксированной точке  $x = \text{const}$  видит периодические колебания напряжения во времени, а «мгновенный снимок» в момент  $t = \text{const}$  показывает периодическое изменение  $U$  вдоль пространственной переменной.

Условие постоянства фазы волны (19) имеет вид

$$\omega t - kx = \text{const}.$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получаем

$$\omega - k \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}. \quad \text{Скорость } v_{\text{фаз}} \text{ является фазовой}$$

*скоростью*: двигаясь в направлении распространения волны со скоростью  $v_{\text{фаз}}$ , наблюдатель будет видеть постоянную фазу бегущей волны. Таким образом, полученная из телеграфных уравнений скорость  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  является фазовой скоростью волны в линии.

#### 4. Соотношение между напряжением и током.

##### Волновое сопротивление

Рассмотрим первое телеграфное уравнение, по-прежнему полагая источник волн синусоидальным:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t} = -Li\omega I. \quad (20)$$

Из решения (19) находим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -ikU. \quad (21)$$

Сравнивая (20) и (21), получаем  $i\omega LI = ikU$ . Это соотношение позволяет найти связь между током и напряжением в длинной линии:

$$\frac{U}{I} = \frac{\omega L}{k} = vL = \sqrt{\frac{L}{C}} \equiv \Omega. \quad (22)$$

Величина  $\Omega$  носит название *волнового сопротивления*. Анализируя размерность, легко убедиться, что  $[\Omega] = \text{Ом}$ , как и активного сопротивления. Соотношение (22) внешне совпадает с законом Ома, волновое сопротивление является действительной величиной и не зависит от частоты. На этом аналогия между волновым и омическим сопротивлением заканчивается.

Физика процессов, которые характеризуют активное и волновое сопротивления, совершенно различна. На омическом сопротивлении происходит рассеяние энергии, тогда как волновое сопротивление введено нами для описания идеальной линии, не содержащей никаких диссипативных элементов. Волновое сопротивление реактивно по своей природе и характеризует процесс «перекачки» энергии магнитного поля в энергию электрического поля и обратно, происходящий в линии при распространении волны. Волновое сопротивление определяет также прохождение волны через концы линии (отражение) и входное сопротивление длинной линии, в чем мы убедимся далее.

Существует стандартный ряд волновых сопротивлений для кабелей и других линий:  $\Omega = 50; 75; 100; (125); 150$  Ом (значение в скобках не является общепринятым). Использование стандартных значений  $\Omega$  упрощает согласование линий с измерительными и другими устройствами.

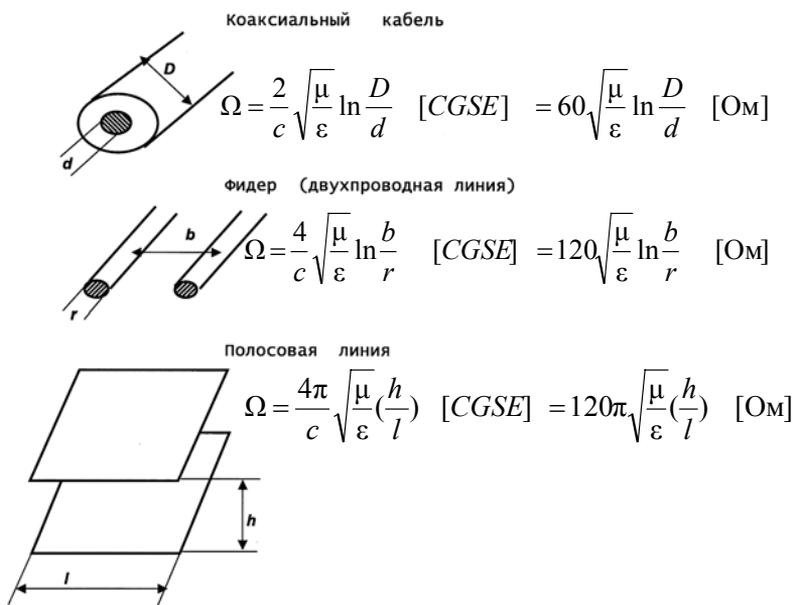


Рис. 5. Схематическое устройство и волновое сопротивление некоторых линий.  $c$  — скорость света,  $\mu$  — магнитная проницаемость,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость.

На рис. 5 приведены соотношения для расчета волнового сопротивления некоторых линий, наиболее часто встречающихся на практике. Все приведенные соотношения получены путем подстановки в (22) соответствующих выражений для погонных индуктивности и емкости при заданной гео-

метрии двухпроводной линии. Расчетные соотношения даны для систем СИ и CGS.

В *коаксиальной кабеле* одним проводником является центральная жила, второй проводник представляет собой соосную металлическую оплетку, между жилой и оплеткой находится цилиндрический слой диэлектрика.

Двухпроводная линия (*фидер*) характеризуется двумя геометрическими размерами – расстоянием между центрами круглых проводников и диаметром последних (оба провода имеют одинаковый диаметр).

*Полосовая (полосковая) линия* образована двумя параллельными плоскостями шириной  $l$ , расположенными на расстоянии  $h$  друг от друга.

Волновое сопротивление линий зависит от соотношения геометрических размеров, а также от магнитных и диэлектрических свойств среды, разделяющей проводники. Магнитная проницаемость диэлектриков  $\mu \approx 1$ , поэтому их различия обусловлены в основном диэлектрическими свойствами.

Для справки заметим, что волновое сопротивление печатной платы составляет 50—150 Ом, для витой пары  $\Omega = 100$ —120 Ом, для телефонного провода  $\Omega \sim 300$  Ом, свободное пространство (вакуум) имеет волновое сопротивление  $\Omega = 120\pi = 377$  Ом.

## 5. Отражение волн. Согласование линии и нагрузки

Волновому движению независимо от его природы присущи общие явления: отражение, преломление, интерференция волн и др. Рассмотрим отражение электрических волн в длинной линии. Пусть линия имеет длину  $L$ , ее левая граница находится в точке  $x = 0$ , в этой же точке действует источник синусоидального напряжения, определяющий граничное условие (9). На правой границе линия замкнута («нагружена») на импеданс  $Z_n$  (рис. 1), это позволяет записать граничное условие при  $x = L$  в виде

$$\frac{U_L}{I_L} = Z_H. \quad (23)$$

Найдем соотношение между током и напряжением в любом сечении линии. Из первого телеграфного уравнения (см. (20))

$$I = -\frac{1}{i\omega L} \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (24)$$

Возвращаясь к общему решению (17), описывающему две встречные пространственные волны, введем обозначения  $U_{\text{пр}}$  и  $U_{\text{отр}}$  для волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси  $x$  соответственно:

$$U(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx} \equiv U_{\text{отр}} + U_{\text{пр}}. \quad (25)$$

Из этого уравнения для производной  $\frac{\partial U}{\partial x}$  получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = A_1 i k e^{ikx} - A_2 i k e^{-ikx} = -ik(U_{\text{пр}} - U_{\text{отр}}). \quad (26)$$

Полученное выражение для  $\frac{\partial U}{\partial x}$  подставляем в соотношение для тока (24):

$$I = \frac{ik}{i\omega L} (U_{\text{пр}} - U_{\text{отр}}) = \frac{1}{vL} (U_{\text{пр}} - U_{\text{отр}}) = \frac{1}{\Omega} (U_{\text{пр}} - U_{\text{отр}}). \quad (27)$$

После подстановки соотношений (25) и (27) в граничное условие (23), получим

$$\frac{(U_{\text{пр}} + U_{\text{отр}})}{(U_{\text{пр}} - U_{\text{отр}})} \Omega = Z_H. \quad (28)$$

Отражение волн характеризует величина, называемая коэффициентом отражения. *Коэффициент отражения по напряжению*  $r_U$  определим как отношение напряжения в отраженной волне к напряжению в прямой волне. Пользуясь этим определением и выражая отношение  $U_{\text{отр}}/U_{\text{пр}}$  из (28), получим

$$r_U \equiv \frac{U_{\text{отр}}}{U_{\text{пр}}} = \frac{Z_H - \Omega}{Z_H + \Omega}. \quad (29)$$

Используем полученное соотношение (29) для анализа некоторых характерных условий отражения (рис. 6).

1.  $Z_H \rightarrow \infty$  (правый конец линии разомкнут — режим «холостого хода»). Из соотношения (29) получаем  $r_U = 1$ , прямая и отраженная волны имеют равные амплитуды и совпадают по фазе. Суперпозиция прямой и отраженной волн дает стоячую волну, напряжение в пучностях которой составляет  $2U_{пр}$ .

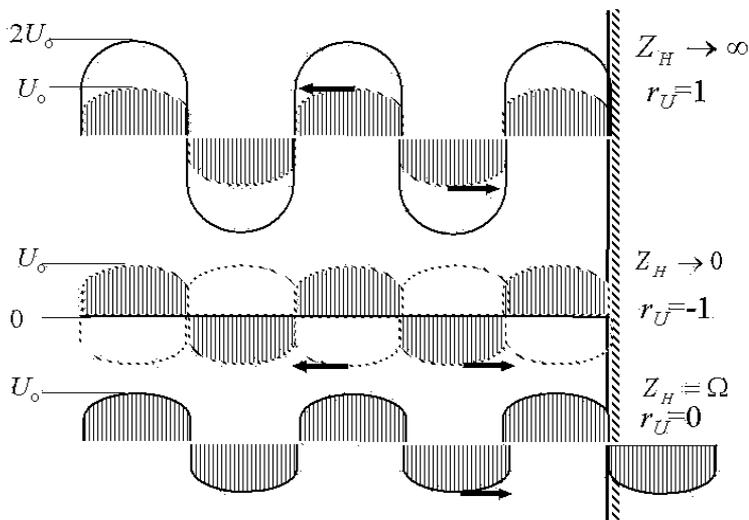


Рис. 6. Отражение в линии при холостом ходе, коротком замыкании и согласовании с нагрузкой.

2.  $Z_H \rightarrow 0$  (режим «короткого замыкания»). Согласно (29),  $r_U = -1$ , т.е. прямая и отраженная волны имеют равные амплитуды и сдвиг по фазе на  $\pi$ . Суперпозиция прямой и отраженной волн приводит к взаимной компенсации напряжений, всюду в линии  $U = 0$ .

3.  $Z_H = \Omega$ . Выражение (29) дает  $r_U = 0$ , отраженная волна отсутствует, следовательно, вся мощность передается

нагрузке. Такой режим отвечает взаимному согласованию линии и нагрузки.

Несо согласованность линии и нагрузки приводит к появлению отраженных волн, число которых быстро увеличивается из-за многократных отражений от концов линии. Размножение и наложение переотраженных сигналов ведет к их хаотизации и создает шум, мешающий регистрации полезного сигнала. Именно несо согласованность волнового сопротивления линии и передающей/принимающей аппаратуры создавала помехи при передаче по первому трансатлантическому кабелю.

Отражение волн тока характеризует коэффициент отражения по току  $r_I$ . Выкладки, аналогичные (23) – (29), дают для  $r_I$ :

$$r_I = \frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{прям}}} = \frac{\Omega - Z_{\text{H}}}{\Omega + Z_{\text{H}}} = -r_U. \quad (30)$$

Источниками отраженных волн являются не только концы линии, но и любые неоднородности, например, локальные изменения геометрии линии или свойств диэлектрика. Локальную неоднородность линии можно представить в виде сосредоточенного элемента с импедансом  $Z$ , включенного в линию с волновым сопротивлением  $\Omega$  (рис. 7). В точке включения  $Z$  возникает отраженная волна, коэффициенты отражения по напряжению равны  $r_{U1} = Z / (Z + 2\Omega)$  и  $r_{U2} = -\Omega / (\Omega + 2Z)$  для схемы с последовательным и параллельным замещением  $Z$  соответственно.

Стремление снизить помехи от рассеянных на неоднородностях волнах диктует высокие требования к технологии изготовления, в частности, коаксиальных кабелей. Коаксиальный кабель отличается от одножильного экранированного провода постоянством параметров. Важно помнить, что неоднородности кабеля могут возникать из-за небрежных действий экспериментатора (удары, сгибы, некачественная пайка).

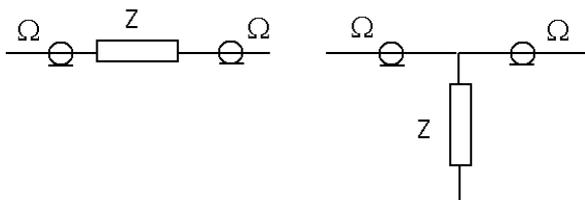


Рис. 7. Эквивалентные схемы линии с локальной неоднородностью.

Отражения в линии аналогичны явлениям, которые наблюдаются и для других волновых процессов, например, в оптике и акустике. Свет рассеивается на неоднородностях среды (вспомним пылинки в луче света). При попадании световой волны на границу раздела двух прозрачных сред в общем случае возникают отраженная и проходящая волны, условием согласования является равенство коэффициентов преломления двух сред.

## 6. Согласованная линия: соотношение Найквиста

Представления о согласованном подключении нагрузки к длинной линии были использованы Найквистом при выводе соотношения, описывающего равновесные флуктуации напряжения на резисторе. Модель, рассмотренная Найквистом, представляет собой электрический аналог абсолютно черного тела.

В качестве модели шумящего резистора рассмотрим сопротивление  $R$ , включенное последовательно с источником случайного напряжения  $V_N$ , среднее значение  $\bar{V}_N = 0$ . Рассматриваемый резистор соединен идеальной длинной линией с аналогичным сопротивлением  $R$ , линия длиной  $L$  имеет волновое сопротивление  $\Omega = R$ . Вся энергия, передаваемая по линии, будет без отражения поглощаться резистором на противоположном конце. Система находится при температуре  $T$ .

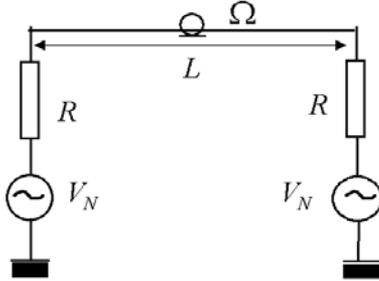


Рис. 8. Модель Найквиста: длинная линия с согласованной нагрузкой

Электромагнитные колебания, распространяющиеся по линии, представляют собой фотоны. Для бозонов (фотонов) среднее по ансамблю число частиц  $n$  в квантовом состоянии с энергией  $\varepsilon$  равно

$$n = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) - 1}. \quad (31)$$

Энергия  $E$ , соответствующая моде излучения на частоте  $\nu$ , равна

$$E = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (32)$$

Одна мода излучения занимает частотный интервал  $\delta f = \frac{\nu}{L}$  ( $\nu$  – скорость распространения по линии). Число мод  $m$  внутри частотного интервала  $\Delta f$  равно  $m = \frac{\Delta f}{\delta f}$ . Энергия в линии в частотном интервале  $\Delta f$  составит

$$E(\Delta f) = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \cdot \frac{\Delta f}{\delta f}. \quad (33)$$

Средняя мощность  $P$  в линии

$$P(\Delta f) = \frac{dE(\Delta f)}{dt} = \frac{hv}{\exp\left(\frac{hv}{kT}\right) - 1} \Delta f. \quad (34)$$

Передаваемая мощность  $P$  поглощается на противоположном конце линии, из закона Джоуля – Ленца:

$$P = I_N^2 R = \frac{U_N^2}{(2R)^2} R \quad (35)$$

( $I_N^2$  — средняя величина квадрата шумового тока,  $U_N^2$  — средняя величина квадрата шумового напряжения на резисторе). Поскольку система находится в равновесии, поглощаемая резистором мощность (35) равна излучаемой мощности.

Приравнявая соотношения (34) и (35), получаем

$$U_N^2 = \frac{4Rhv}{\exp\left(\frac{hv}{kT}\right) - 1} \Delta f. \quad (36)$$

Найдем частоту  $\nu_b$ , для которой при комнатной температуре ( $\sim 300$  К) выполняется соотношение  $h\nu_b = kT$ :

$$\nu_b = \frac{kT}{h} = \frac{1.4 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{6.6 \cdot 10^{-34}} \sim 10^{13} \text{ Гц}. \quad (37)$$

Частота  $\nu_b$  находится в оптическом диапазоне спектра, поэтому для всех радиотехнических частот справедливо соотношение  $h\nu \ll kT$ . Разлагая экспоненту в знаменателе (36) в ряд и ограничиваясь первым порядком малости, получим

$$U_N^2 \approx \frac{4Rhv}{1 + \left(\frac{hv}{kT}\right) - 1} \Delta f = 4RkT\Delta f. \quad (38)$$

Соотношение (38), полученное Найквистом в 1927 г., обычно используется для описания равновесных тепловых флуктуаций напряжения на резисторе.

## 7. Входное сопротивление нагруженной линии

Наша цель – найти связь между током и напряжением на входе в линию, нагруженную на импеданс  $Z_H$ . Если для описания волн напряжения в линии использовать решение (17), включающее прямую и отраженную волны, то общее соотношение (27) между током и напряжением запишется в виде

$$I(x) = -\frac{1}{\Omega} (A_1 e^{ikx} - A_2 e^{-ikx}). \quad (39)$$

Входное сопротивление линии (в точке  $x = 0$ ) находим из соотношений (17) и (39):

$$\frac{U}{I} \Big|_{x=0} = \Omega \frac{1 + \frac{A_1}{A_2}}{1 - \frac{A_1}{A_2}}. \quad (40)$$

Входное сопротивление определяется через отношение констант  $A_1/A_2$ , которое может быть найдено из граничного условия на правой границе ( $x = L$ ). Граничное условие при  $x = L$  задается законом отражения (29), связывающим прямую и отраженную волны:

$$r_U = \frac{A_1 e^{ikL}}{A_2 e^{-ikL}} = \frac{Z_H - \Omega}{Z_H + \Omega}. \quad (41)$$

Из (41) после преобразований получаем

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{Z_H - \Omega}{Z_H + \Omega} e^{-2ikL}. \quad (42)$$

Подставляя отношение  $A_1/A_2$  из (42) в формулу (40), получим для входного сопротивления нагруженной линии

$$Z_{in} \equiv Z \Big|_{x=0} = \frac{1 + \frac{Z_H - \Omega}{Z_H + \Omega} e^{-2ikL}}{1 - \frac{Z_H - \Omega}{Z_H + \Omega} e^{-2ikL}} = Z_H \frac{1 + i \frac{\Omega}{Z_H} \operatorname{tg} kL}{1 + i \frac{Z_H}{\Omega} \operatorname{tg} kL}. \quad (43)$$

Из (43) следует, что входное сопротивление нагруженной линии является комплексной величиной, модуль которой может принимать любое значение от нуля до бесконечности в зависимости от соотношения между  $\Omega$  и сопротивлением нагрузки, а также от отношения длины линии  $L$  к длине волны сигнала  $\lambda$ .

Рассмотрим входное сопротивление разомкнутой, короткозамкнутой и согласованно нагруженной линии.

1. Для разомкнутой линии  $Z_H \rightarrow \infty$ , из соотношения (43) получаем  $Z_{in} = -i\Omega \operatorname{tg} kL$ . Входное сопротивление является чисто мнимым и обращается в ноль, если между длиной линии и длиной волны синусоидального сигнала выполняется соотношение  $L = (2n + 1)\lambda/4$  ( $n$  – целое).

2. Для короткозамкнутой линии  $Z_H \rightarrow 0$ , из соотношения (43) получаем  $Z_{in} = i\Omega \operatorname{tg} kL$ . Входное сопротивление является мнимой величиной и обращается в ноль при выполнении соотношения  $L = n\lambda/2$  ( $n$  – целое).

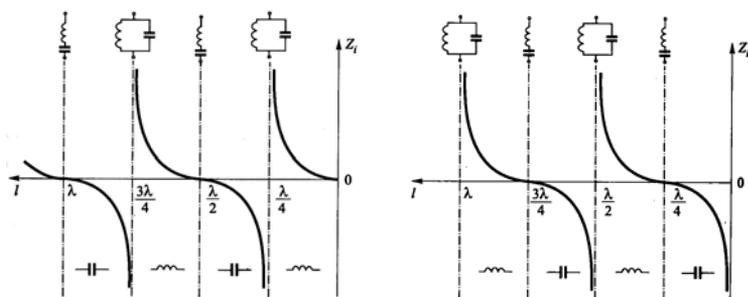


Рис. 9. Входное сопротивление короткозамкнутой (слева) и разомкнутой (справа) линий в зависимости от длины

Зависимость входного сопротивления от длины линии для случаев  $Z_H = 0$  и  $Z_H = \infty$  приведена на рис. 9.

3. В случае согласованной нагрузки  $Z_H = \Omega$ , из соотношения (43) получаем  $Z_{in} = Z_H = \Omega$ .

Выражение (43) показывает, что длинным линиям присущи особенности, которые, на первый взгляд, могут по-

казаться странными. Например, замкнутая накоротко четвертьволновая линия ( $L = \lambda/4$ ) имеет бесконечно большое входное сопротивление — при любом приложенном напряжении ток через линию будет равен нулю. Линия ведет себя как диэлектрик. Эта особенность позволяет укреплять проводники линии, питающей, например, антенну непосредственно на металлических опорах, врытых в землю. Концы опоры, находящиеся в земле, можно считать замкнутыми накоротко, и если высота опоры равна  $\lambda/4$ , то ее входное сопротивление для передаваемого сигнала будет бесконечно большим. Преимущество такого «безизоляторного» способа закрепления линии состоит в том, что нерезонансные сигналы от случайных помех (для которых  $L \neq \lambda/4$ ) будут беспрепятственно стекать в землю.

Резонансные явления в нагруженной линии, которые иллюстрирует рис. 9, обусловлены наложением прямой и отраженной волн и являются аналогами интерференции света в оптике.

## 8. Способы согласования: резистор, шлейф, четвертьволновая линия

Эффективная передача сигнала требует согласования входного сопротивления нагрузки, роль которой может играть осциллограф, АЦП или другое регистрирующее устройство, с волновым сопротивлением кабеля. Согласовать нагрузку и кабель можно путем включения в цепь одного из трех элементов: резистора, четвертьволновой линии или шлейфа.

Если волновое сопротивление линии  $\Omega$  превышает входное сопротивление регистрирующего устройства  $Z_H$ , то согласование может быть достигнуто путем последовательного подключения резистора  $R = \Omega - Z_H$  ко входу регистратора. Если волновое сопротивление линии  $\Omega$  меньше  $Z_H$ , то для уменьшения нагрузки следует подключить резистор ве-

личной  $R = Z_H \cdot \Omega / (Z_H - \Omega)$  параллельно входу. В обоих случаях результатом согласования будет уменьшение мощности регистрируемого полезного сигнала.

Согласовать линию с волновым сопротивлением  $\Omega$  и импеданс нагрузки  $Z_H$  можно путем включения между ними отрезка линии с волновым сопротивлением  $\Omega_1$ , длина отрезка  $l$  выбирается равной четверти длины волны передаваемого сигнала  $l = \lambda/4$  (рис. 10). В этом случае согласования добиваются путем выбора величины  $\Omega_1$ . Для четвертьволновой линии величина  $\text{tg}(kl) = \text{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}\right) \rightarrow \infty$ , из соотношения (43) находим, что входное сопротивление  $Z_{\lambda/4}$  такой линии, нагруженной  $Z_H$ , равно

$$Z_{\lambda/4} = \frac{\Omega_1^2}{Z_H}. \quad (44)$$

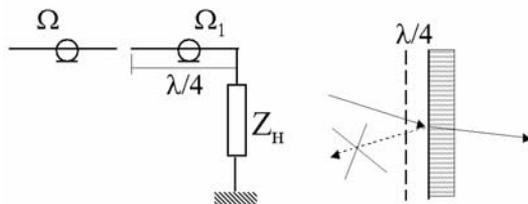


Рис. 10. Согласование линии с нагрузкой с помощью  $\lambda/4$ -вставки и «просветление оптики» с использованием  $\lambda/4$ -пленок

Отраженный сигнал не возникнет, если входное сопротивление  $Z_{\lambda/4}$  будет равно волновому сопротивлению подводящей линии:  $Z_{\lambda/4} = \Omega$ . Это соотношение позволяет найти величину  $\Omega_1$ , которая обеспечивает согласованный режим подключения:

$$\Omega = \frac{\Omega_1^2}{Z_H}; \quad \Omega_1 = \sqrt{\Omega \cdot Z_H}. \quad (45)$$

Очевидно, что  $\lambda/4$ -метод согласования эффективен в том случае, если передаваемый сигнал является «почти монохроматическим», т.е. обладает узким спектром.

Оптическим аналогом  $\lambda/4$ -метода согласования линии является «просветление оптики», которое состоит в том, что на поверхность стеклянного объектива наносится диэлектрический слой, толщина которого составляет четверть длины волны падающего света. Волны, отраженные от поверхности нанесенной пленки и от поверхности стекла (при выполнении соотношения, аналогичного (45):  $n_1^2 = n \cdot n_2$ , где  $n$ ,  $n_1$  и  $n_2$  – показатели преломления воздуха, пленки и стекла соответственно), приобретают фазовый сдвиг  $\pi$  и их интерференция приводит к взаимному погашению. В этих условиях отраженная волна отсутствует. Согласование линии с нагрузкой с помощью  $\lambda/4$ -вставки также основано на явлении интерференции.

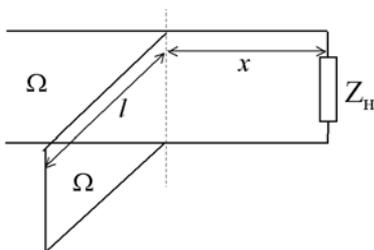


Рис. 11. Схема подключения шлейфа

Шлейфом называют короткозамкнутый отрезок кабеля, имеющего одинаковое с линией волновое сопротивление  $\Omega$ , который подключается к линии параллельно нагрузке  $Z_H$  на некотором расстоянии от последней (рис. 11). Покажем, что варьируя расстояние  $x$  от нагрузки до точки присоединения шлейфа и длину шлейфа  $l$  можно добиться согласования линии с  $Z_H$ .

Выкладки несколько упрощаются, если вместо сопротивлений  $Z$  использовать обратные им величины проводимо-

сти  $Y = \frac{1}{Z}$ . Согласно (43), входная проводимость короткозамкнутого шлейфа составляет

$$Y_i = \frac{1}{i\Omega \operatorname{tg} kl}, \quad (46)$$

входная проводимость отрезка нагруженной линии длиной  $x$  равна

$$Y_l = \frac{1}{Z_H} \cdot \frac{1 + i \frac{Z_H}{\Omega} \operatorname{tg} kx}{1 + i \frac{\Omega}{Z_H} \operatorname{tg} kx}. \quad (47)$$

Результирующая проводимость  $Y$  в месте подключения шлейфа складывается из входных проводимостей шлейфа (46) и отрезка линии (47):

$$Y = Y_i + Y_l = \frac{1}{i\Omega \operatorname{tg} kl} + \frac{1}{Z_H} \frac{1 + i \frac{Z_H}{\Omega} \operatorname{tg} kx}{1 + i \frac{\Omega}{Z_H} \operatorname{tg} kx}. \quad (48)$$

Проводимость  $Y$  представляет собой комплексное число, которое запишем в виде  $Y = G + iB$ . Согласование с линией в точке подключения шлейфа означает, что проводимость  $Y$  равна волновой проводимости линии  $Y = 1/\Omega$ . Это условие с учетом того, что  $\Omega$  — действительное число, эквивалентно двум уравнениям:

$$G = 1/\Omega, \quad (49)$$

$$B = 0. \quad (50)$$

После выделения действительной и мнимой части выражения (48) уравнения (49) и (50) можно записать в развернутом виде:

$$G = \frac{1}{Z_H} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 kx}{1 + \left(\frac{\Omega}{Z_H}\right)^2 \operatorname{tg}^2 kx} = \frac{1}{\Omega}, \quad (51)$$

$$B = -\frac{1}{\Omega \operatorname{tg} kl} + \frac{1}{Z_H} \cdot \frac{\left(\frac{Z_H}{\Omega} - \frac{\Omega}{Z_H}\right) \operatorname{tg} kx}{1 + \left(\frac{\Omega}{Z_H}\right)^2 \operatorname{tg}^2 kx} = 0. \quad (52)$$

Решением (51) является соотношение

$$\operatorname{tg} kx = \pm \sqrt{\frac{Z_H}{\Omega}}, \quad (53)$$

подстановка его в (52) позволяет найти решение в виде

$$\operatorname{tg} kl = \pm \frac{\sqrt{\frac{Z_H}{\Omega}}}{\frac{Z_H}{\Omega} - 1}. \quad (54)$$

Расстояния  $x$  и  $l$ , определяемые решениями (53) и (54), являются периодическими функциями отношения  $Z_H/\Omega$ , на практике обычно берут минимальные длины шлейфа  $l$  и отрезка  $x$ .

## 9. Реальная линия с потерями

Вернемся к рассмотрению реальной линии, эквивалентная схема короткого участка которой приведена на рис. 2. Отметим особенности, отличающие передачу сигнала в реальной линии от распространения волн в идеальной линии.

Для системы «неусеченных» телеграфных уравнений (1) будем искать решения в виде синусоидальных волн напряжения  $U$  и тока  $I$ :

$$U = U_0 e^{i\omega t}, \quad I = I_0 e^{i\omega t}. \quad (55)$$

Подставляя  $I$  в виде (55) в первое телеграфное уравнение, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -(i\omega L + R)I. \quad (56)$$

Дифференцируя полученное соотношение по  $x$  и подставляя выражение для  $\partial I/\partial x$  из второго телеграфного уравнения, имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -(i\omega L + R) \frac{\partial I}{\partial x} = (R + i\omega L)(G + i\omega C)U . \quad (57)$$

Уравнение (57) представляет собой уравнение Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \gamma^2 U = 0 , \quad (58)$$

в котором использовано обозначение

$$\gamma = \sqrt{(R + i\omega L)(G + i\omega C)} . \quad (59)$$

Величина  $\gamma$  носит название *постоянной распространения*. Решением уравнения (58) является функция вида

$$U(x) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x} . \quad (60)$$

Если в постоянной распространения выделить действительную и мнимую часть  $\gamma = \alpha + i\beta$ , то соотношение (60) запишется в виде:

$$U(x) = A_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + A_2 e^{-(\alpha+i\beta)x} . \quad (61)$$

Постоянные  $A_1$  и  $A_2$  определяются из граничных условий. Если принять, что граничное условие при  $x = 0$  задается включением в этой точке генератора синусоидальных колебаний, то  $A_1 = A_2 = U_0 e^{i\omega t}$  и решение (61) запишется в виде

$$U(x) = U_0 [e^{\alpha x} e^{i(\omega t + \beta x)} + e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - \beta x)}] . \quad (62)$$

Сравнивая (62) с выражением (19), описывающим бегущую волну, заключаем, что решение (62) соответствует двум встречным бегущим волнам, каждая из которых является затухающей. Действительная часть постоянной распространения  $\alpha$  характеризует изменение амплитуды сигнала на единицу расстояния и носит название *коэффициента затухания*. Мнимая часть  $\beta$  характеризует изменение фазы на единицу расстояния и носит название *фазовой постоянной*. Фазовая постоянная является аналогом введенного ранее волнового

числа  $k$ . «Естественной» размерностью для величин  $\alpha$  и  $\beta$  является 1/м (система СИ), затухание часто измеряют также в дБ/км.

Условие постоянства фазы в выражении (62) дает для фазовой скорости сигнала в линии  $v = \omega/\beta$ . Это выражение аналогично полученному ранее соотношению для фазовой скорости в идеальной линии  $v = \omega/k$ , но поскольку фазовая постоянная зависит от частоты  $\beta = \beta(\omega)$ , в реальной линии имеет место *дисперсия скорости*  $v = v(\omega)$ .

Анализ соотношения между током и напряжением, аналогичный (20) — (22) для идеальной линии, приводит к выражению для волнового сопротивления линии с потерями:

$$\Omega = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}, \quad (63)$$

которое при  $R = 0$  и  $G = 0$  переходит в соотношение для идеальной линии (22).

Подытожим основные отличия реальной линии от идеальной линии без потерь. В реальной линии сигналы затухают с расстоянием, причем степень ослабления зависит от частоты  $\alpha = \alpha(\omega)$ . В линии с потерями имеет место дисперсия скорости  $v = v(\omega)$ . Согласование реальной линии с нагрузкой требует учета частотной зависимости волнового сопротивления  $\Omega = \Omega(\omega)$ . Дисперсия коэффициента затухания и фазовой скорости сигнала, а также волнового сопротивления линии приводит к искажению формы сложных (негармонических) передаваемых сигналов.

## 10. Линия с малыми потерями.

### Неискажающая линия

Независимо от того, предназначена линия для передачи энергии или маломощных информационных сигналов, обычно стремятся использовать линии с малым коэффициентом затухания — проводники с малым сопротивлением  $R$  и

диэлектрики с минимальной проводимостью  $G$ . На практике часто активные потери в линии малы по сравнению с реактивными составляющими, т.е. выполняются условия  $G \ll \omega C$  и  $R \ll \omega L$ . Получим выражения для коэффициента затухания в этом случае.

Запишем постоянную распространения (59) в виде

$$\gamma = \sqrt{i\omega L \left(1 + \frac{R}{i\omega L}\right) i\omega C \left(1 + \frac{G}{i\omega C}\right)} = i\omega\sqrt{LC} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{R}{i\omega L}\right) \left(1 + \frac{G}{i\omega C}\right)}. \quad (64)$$

В произведении под корнем пренебрежем членами второго порядка малости и разложим подкоренное выражение в ряд, ограничиваясь первыми членами разложения:

$$\gamma = i\omega\sqrt{LC} \cdot \sqrt{1 + \frac{R}{i\omega L} + \frac{G}{i\omega C}} \approx i\omega\sqrt{LC} \cdot \left(1 + \frac{R}{2i\omega L} + \frac{G}{2i\omega C}\right). \quad (65)$$

Дальнейшее упрощение выражения (65) может быть достигнуто, если предположить, что все потери происходят только в проводнике, а диэлектрик является идеальным ( $G = 0$ ), в этом случае

$$\gamma = i\omega\sqrt{LC} \cdot \left(1 + \frac{R}{2i\omega L}\right). \quad (66)$$

Для коэффициента затухания при этом получаем

$$\alpha = \operatorname{Re} \gamma = \frac{\omega R \sqrt{LC}}{2\omega L} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2\Omega}. \quad (67)$$

Искажение формы становится особенно серьезной проблемой при передаче коротких импульсов, имеющих широкий частотный спектр. Хевисайдом были сформулированы условия, позволяющие построить неискажающую передающую линию:

$$\frac{G}{C} = \frac{R}{L}. \quad (68)$$

Покажем, что при выполнении соотношения (68) коэффициент затухания, фазовая скорость и волновое сопротивление

становятся частотно-независимыми. Обозначим  $\frac{G}{C} = \frac{R}{L} \equiv p$  и перепишем выражение (64) в виде

$$\gamma = i\omega\sqrt{LC} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{R}{i\omega L}\right)\left(1 + \frac{G}{i\omega C}\right)} = i\omega\sqrt{LC}\left(1 + \frac{p}{i\omega}\right). \quad (69)$$

В этом случае получаем коэффициент затухания

$$\alpha = \operatorname{Re} \gamma = p\sqrt{LC}, \quad (70)$$

фазовую постоянную

$$\beta = \operatorname{Im} \gamma = \omega\sqrt{LC} \quad (71)$$

и волновое сопротивление

$$\Omega = \sqrt{\frac{L\left(1 + \frac{R}{i\omega L}\right)}{C\left(1 + \frac{G}{i\omega C}\right)}} = \sqrt{\frac{L\left(1 + \frac{p}{i\omega}\right)}{C\left(1 + \frac{p}{i\omega}\right)}} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (72)$$

Таким образом, выполнение условия Хевисайда (68) исключает искажения формы сигнала, поскольку все частотные составляющие сложного сигнала ослабляются в равной мере и перемещаются с одинаковой скоростью  $v = \omega/\beta = 1/\sqrt{LC}$ , равной фазовой скорости в идеальной линии. На приемном конце линии получается копия отправленного сигнала, уменьшенная по амплитуде в  $\alpha L$  раз. Волновое сопротивление неискажающей линии совпадает с волновым сопротивлением идеальной линии без потерь.

## 11. «Поперечно длинная» линия: скин-эффект

Для высокочастотных сигналов длина волны  $\lambda$  может оказаться меньше не только длины линии  $L$ , но и поперечного размера проводника  $a$ . При выполнении условия  $\lambda < a$  линия становится «длинной» и в поперечном направлении, что ведет к необходимости рассматривать распространение волн по сечению проводника.

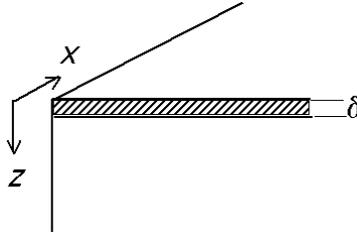


Рис. 12. Скин-слой на поверхности проводника

Пусть электрический ток распространяется в направлении оси  $x$ , ось  $z$  направим вглубь проводника (рис. 12). Из уравнений Максвелла может быть получено выражение для компоненты электрического поля  $E_x$  в направлении  $x$ :

$$E_x = A e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{-i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}. \quad (73)$$

$A$  – нормировочный множитель,  $\delta$  — характерный пространственный масштаб в направлении оси  $z$ . Из соотношения (73) видно, что электрическое поле затухает по мере проникновения вглубь проводника и приобретает фазовый сдвиг. Локализация электрического поля преимущественно вблизи поверхности проводника получила название «скин-эффекта», а пространственный масштаб  $\delta$ , характеризующий скорость затухания поля и набег фазы по глубине, принято называть толщиной скин-слоя. Глубина проникновения электромагнитного поля в проводник существенно зависит от частоты поля  $\omega$ , зависимость  $\delta$  от частоты имеет вид (в системе CGS)

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}} \quad (74)$$

( $c$  — скорость света,  $\mu$  — магнитная проницаемость проводника,  $\sigma$  — удельная проводимость при постоянном токе). Для материалов, не являющихся ферромагнетиками,  $\mu \sim 1$ . В случае медного проводника для грубой оценки величины  $\delta$  можно использовать соотношение

$$\delta \approx \frac{10}{\sqrt{f}} \text{ (см)}, \quad (75)$$

которое получается из (74) при подстановке численных значений соответствующих величин. Для частоты  $f = 50$  Гц на основании (75) получаем  $\delta \approx 1,4$  см, при таких частотах поверхностный эффект не заметен; при частоте 1 МГц  $\delta \approx 100$  мкм, это сравнимо с диаметром человеческого волоса.

При практических расчетах для высоких частот скин-эффект учитывается введением понятия поверхностного сопротивления  $R_s$ . Сопротивление проводника круглого сечения радиусом  $a$  и длиной  $l$  при постоянном токе равно

$$R_{\text{пч}} = \rho \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma \pi a^2}.$$

Будем предполагать, что при высоких частотах весь протекающий ток сосредоточен в кольце толщиной  $\delta$  вблизи поверхности проводника при этом  $\delta \ll a$ . При этих предположениях высокочастотное сопротивление равно  $R_{\text{вч}} = \frac{l}{\sigma 2\pi a \delta}$ . Последнее соотношение можно использовать для введения понятия  $R_s$ , если переписать его в виде

$$R_{\text{вч}} = \frac{l}{2\pi a \sigma \delta} \equiv \frac{R_s l}{2\pi a}. \quad (76)$$

Из (76) следует, что

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta}; \quad (77)$$

введенная таким образом величина  $R_s$  имеет размерность Ом. Подставляя в (77) выражение (74) для частотной зависимости  $\delta$ , получим

$$R_s = \frac{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}{\sigma c} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} \cdot \sqrt{f} \quad (78)$$

( $f = 2\pi\omega$ ). Для меди, например,  $R_s = 2,5 \cdot 10^{-7} \sqrt{f}$  Ом.

Скин-эффект приводит к локализации омических потерь в поверхностном слое толщиной  $\sim \delta$ . В этих условиях серебрение поверхности проводников существенно уменьшает затухание сигнала в линии. Скин-эффект приводит к растягиванию коротких передаваемых импульсов во времени, поскольку, согласно (73), имеется «запаздывание» фазы по глубине проводника.

## 12. «Поперечно длинная» линия: волновод

Назначение любой линии – перенос электромагнитной энергии от источника к нагрузке. Плотность потока энергии электромагнитного поля описывается вектором Пойнтинга  $\vec{P}$ :

$$\vec{P} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] \text{ (CGS); } \vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}] \text{ (СИ)} \quad (79)$$

( $c$  – скорость света,  $E$  и  $H$  – напряженности электрического и магнитного полей соответственно). Модуль вектора  $\vec{P}$  равен количеству энергии, переносимой через единичную площадь, перпендикулярную  $\vec{P}$ , в единицу времени. Схема распределения силовых линий электрического и магнитного полей, направление тока  $\vec{J}$  и вектора  $\vec{P}$  для двухпроводной линии приведены на рис. 13.

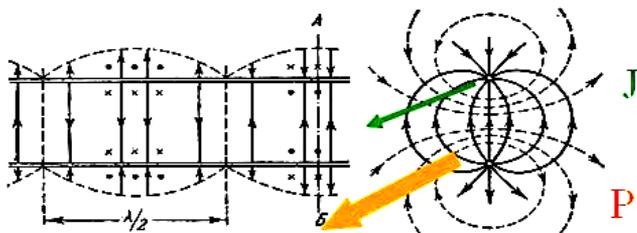


Рис. 13. Направление тока  $\vec{J}$ , потока энергии  $\vec{P}$  и распределение силовых линий электрического и магнитного поля в двухпроводной линии

Мгновенная картина силовых линий в сечении двухпроводной линии плоскостью  $AB$  (рис. 13) представляет поле диполя (диполь образуют два равных по величине и противоположных по знаку заряда  $q$ ; если расстояние между зарядами равно  $r$ , то дипольный момент такой системы  $d_0 = qr$ ). Движение вдоль линии бегущих электромагнитных волн с частотой  $\omega$  приведет к колебаниям дипольного момента по закону  $d = d_0 \cdot \sin \omega t$ . Осциллирующий диполь излучает в окружающее пространство электромагнитные волны, средняя мощность излучения  $W$  связана с частотой колебаний и дипольным моментом соотношением (система CGS)

$$W = \frac{1}{3c^3} \omega^4 d_0^2. \quad (80)$$

Выражение (80) показывает, что потери на излучение в двухпроводной линии резко увеличиваются по мере роста частоты передаваемых сигналов.

Уменьшение потерь на излучение при передаче высокочастотных сигналов достигается тем, что в качестве передающей линии используют коаксиальный кабель. Коаксиальная конфигурация проводников приводит к тому, что электромагнитное поле оказывается сосредоточенным в пространстве между проводниками, и потери на излучение вовне становятся минимальными.

Для передачи электромагнитной энергии в области сверхвысоких частот используются волноводы. Волновод, например, применяется в спектрометре электронного парамагнитного резонанса, работающем на частоте  $\sim 10$  ГГц. Волновод представляет собой трубу из проводящего материала, как правило, прямоугольного или круглого сечения, внутри которой распространяются электромагнитные волны.

Переход от коаксиального кабеля к волноводу круглого сечения можно представить себе как удаление из кабеля центральной жилы. Однако известно, что силовые линии электрического поля должны быть нормальны поверхности проводника. При наличии двух проводников в линии выпол-

нение этого условия достигается тем, что силовые линии начинаются на поверхности одного проводника и заканчиваются на поверхности второго (рис. 13). При наличии только одной проводящей поверхности, как в волноводе, выполнение этого условия не выглядит очевидным. С другой стороны, электромагнитные волны могут распространяться в пространстве вообще без всяких линий. Необходимо лишь соответствие конфигурации электромагнитного поля требованиям, вытекающим из уравнений Максвелла: поперечность волн и ортогональность векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .

Пусть переход от коаксиального кабеля к круглому волноводу происходит так, что центральный провод в каком-то месте заканчивается (рис. 14). Кабель на левом конце пи-

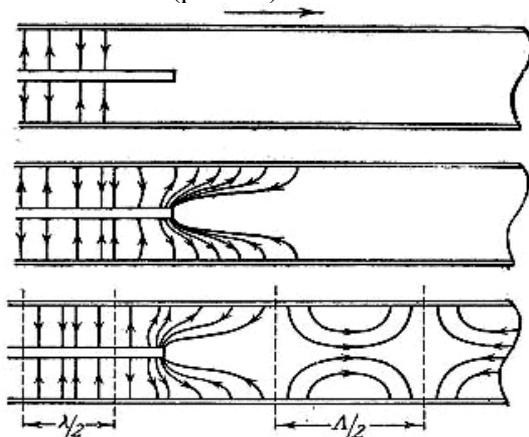


Рис. 14. Отрыв линий электрического поля от провода при переходе от коаксиального кабеля к цилиндрическому волноводу

тается источником переменного напряжения, вправо распространяется электромагнитная волна. Будем для простоты рассматривать силовые линии только электрического поля. Волна, достигая конца провода, создает высокую плотность силовых линий на его конце. Плотность силовых линий характеризует напряженность поля. Объемная плотность энергии

электромагнитного поля  $E_V$  зависит от напряженности электрического и магнитного полей:

$$E_V = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2). \quad (81)$$

Объемная плотность энергии характеризует давление, из этого следует, что силовые линии стремятся «расталкиваться» - поле вытесняется из области с высокой напряженностью в области с меньшей напряженностью. Расталкивание силовых линий приведет к их отрыву от центральной жилы и замыканию на внешний проводник (рис. 14).

Рассмотрим качественно переход от двухпроводной линии к волноводу (рис. 15). Представим, что оба провода двухпроводной линии деформируются в широкие ленты. Когда ширина проводников  $a$  станет соизмеримой с длиной волны распространяющегося сигнала, распределение электрического поля в пространстве между лентами станет существенно неоднородным. На рис. 15 показано распределение поля при  $a \sim \lambda/2$ . Узлы волны отвечают условию  $E = 0$ , поэтому если соединить эти точки проводниками (вдоль пунктирных линий), то структура поля не изменится. Соединение узловых линий  $E = 0$  проводящими поверхностями означает переход к волноводу прямоугольного сечения, внутри которого распространяется волна.

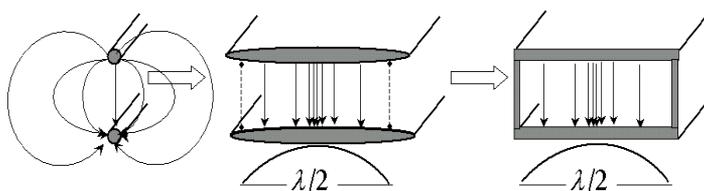


Рис. 15. Переход от двухпроводной линии к прямоугольному волноводу

Условие  $a = \lambda/2$  задает тип волны (*моду* электромагнитных колебаний), которая может распространяться в волноводe, но это не единственная возможная мода. Боковые

поверхности будут находиться в узлах волны, если  $a = n \cdot \lambda / 2$ , где  $n$  – целое. Кроме того, вертикальный размер сечения волновода  $b$  также должен быть кратен целому числу полуволн:  $b = m \cdot \lambda / 2$ . Набор чисел  $n$  и  $m$  определяет различные моды электромагнитных колебаний, которые могут распространяться в волноводе.

Достоинством волновода при передаче высокочастотных сигналов является полное отсутствие излучения во внешнее пространство. Если сравнить коаксиальный кабель с волноводом, то преимущество последнего проявляется в меньшей величине коэффициента затухания  $\alpha$  вследствие меньших джоулевых потерь. Анализ потерь требует детального рассмотрения модового состава излучения в волноводе и выходит далеко за рамки данного курса, но в целом меньшие значения коэффициента  $\alpha$  в волноводе обусловлены меньшей плотностью поверхностных токов, сопровождающих движение электромагнитной волны по линии. Сравнение потерь в круглом волноводе и коаксиальном кабеле равного диаметра приведено на рис. 16 для различных мод излучения.

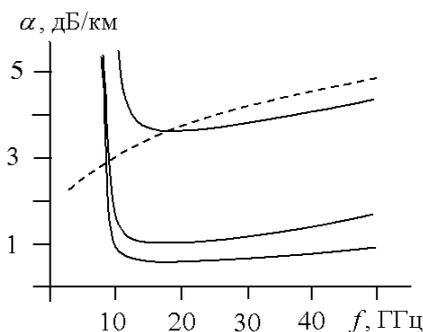


Рис. 16. Затухание волн в коаксиальном кабеле (пунктирная линия) и различных мод в волноводе (сплошные линии)

Рассмотренные *электрические* волноводы используются для передачи сигналов в диапазоне частот  $\sim 1$ — $100$  ГГц, в оптическом диапазоне  $\nu > 10^{13}$  Гц для этой цели применяют

диэлектрические волноводы. В основе передачи сигналов по диэлектрическим волноводам лежит явление *полного внутреннего отражения* волн. При попадании луча света на границу раздела двух прозрачных сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  (положим для определенности  $n_1 < n_2$ ) углы падения  $\theta_1$  и преломления  $\theta_2$  (см. рис. 17) связаны законом Снелля:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (82)$$

Из (82) следует, что если свет падает из оптически более плотной среды на границу раздела под углом, превышающим критический угол  $\theta_2^* = \arcsin \frac{1}{n_2}$  (при  $n_1 = 1$ ), то угол пре-

ломления оказывается больше  $\pi/2$  и свет не выходит из более плотной среды (рис. 17). Если взять в качестве более плотной среды волокно, изготовленное из прозрачного полимера или кварца, и направить луч света внутрь волокна под соответствующим углом, то световые волны будут испытывать многократные отражения от поверхности, всегда оставаясь внутри волокна (рис. 17). По аналогии с электрическими волноводами такие линии получили название *световодов*, или *оптических волокон*.

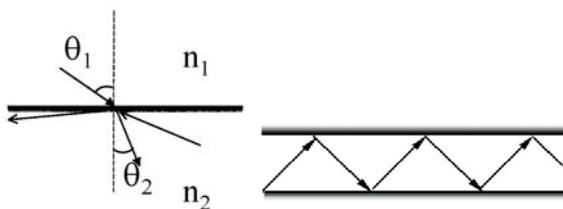


Рис. 17. Преломление света на границе прозрачных сред и полное внутреннее отражение волн в световоде

Достоинствами оптоволоконных линий является малое затухание сигналов (в кварцевых волокнах достигнута величина  $\alpha = 0,2$  дБ/км), нечувствительность к электромаг-

нитным помехам и высокая рабочая частота  $\sim 10^{14}$  Гц, позволяющая с большой скоростью передавать широкополосные сигналы. Этим объясняется широкое применение оптоволоконных линий для передачи сигналов, например, одна из линий общей протяженностью 13 тыс. км соединяет Европу и Америку и позволяет передавать информацию со скоростью  $2,5 \cdot 10^{12}$  бит/с.

Интересно отметить, что полное внутреннее отражение наблюдается для акустических волн в океане внутри природного волновода, называемого «подводным звуковым каналом». Зависимость скорости звука в океане от глубины имеет минимум при 500—2000 м, на этих глубинах проходит ось звукового канала. На меньших и больших глубинах скорость звука выше, что в терминах оптики эквивалентно меньшему значению показателя преломления  $n$ . Акустические волны, отражаясь от границ канала, остаются внутри «звуководы» (см. рис. 17) и распространяются вдоль его оси с малым затуханием, поскольку рассеяние на поверхности воды и на дне при этом отсутствует.

## Список литературы

1. *Стариковская С.М.* Физические методы исследования. Семинарские занятия. 2. Электрические цепи. Измерение импульсных сигналов: Учебно-методическое пособие.— М.: МФТИ, 2004.
2. *Дубнищев Ю.Н.* Колебания и волны.— Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2004.
3. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи.— М.: Высшая школа, 1996.
4. *Харкевич А.А.* Теоретические основы радиосвязи.— М.: ГИТТЛ, 1957.
5. *Максимычев А.В.* Физические методы исследования. Задачи (часть 1). Погрешности эксперимента, длинные линии, измерение давления, температуры, потоков излучения и частиц: Учебно-методическое пособие.— М.: МФТИ, 2003.